



MÉMOIRE DE MASTER  
M2 PHYSIQUE FONDAMENTALE [FUNPHYS]

---

# ÉTATS STATIONNAIRES ET CORRÉLATIONS DANS DES MODÈLES DE MATIÈRE ACTIVE

---

*Auteur :*  
Daniel YAACOUB<sup>†</sup>

*Directeur :*  
Dr. Vivien LECOMTE<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> M2 Physique Fondamentale,  
Aix-Marseille Université

<sup>‡</sup>Physique Statistique et Modélisation,  
Laboratoire Interdisciplinaire de  
Physique - UMR 5588,  
Université Grenoble-Alpes

Out of equilibrium classical statistical mechanics . Correlated stochastic processes .  
Active matter . Irreversible and non-Markovian dynamics . Stationary states

15 Mars 2021 - 15 Août 2021



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Prélude : processus hors d'équilibre, irréversibilité stochastique et matière active</b>	<b>5</b>
2.1	Processus stochastiques réversibles et proche-hors-équilibre . . . . .	5
2.1.1	Processus de Wiener : fluctuations blanches . . . . .	6
2.1.2	Processus d'Ornstein-Uhlenbeck : fluctuations colorées . . . . .	7
2.1.3	Processus Brownien et problème de Kramers : échappement d'un état métastable . . . . .	8
2.2	Processus stochastiques irréversibles, lointain-hors-équilibre et activité . . . . .	9
2.2.1	Processus d'Ornstein-Uhlenbeck Actif . . . . .	9
2.2.2	Irréversibilité . . . . .	10
2.2.3	Dynamique non markovienne . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Statistique stationnaire unidimensionnelle d'une particule Ornstein-Uhlenbeck active</b>	<b>13</b>
3.1	Situation et enjeux : échappement d'un état métastable hors d'équilibre . . . . .	14
3.2	Approche locale : Fokker-Planck . . . . .	15
3.2.1	De Langevin à Fokker-Planck . . . . .	15
3.2.2	Contrainte de réversibilité - Potentiel harmonique . . . . .	15
3.2.3	Limite de basse température : principe de grande déviation . . . . .	16
3.3	Régime de faible activité . . . . .	17
3.3.1	Résultats préexistants : . . . . .	17
3.3.2	Méthode formelle pour la dérivation du quasi-potentiel . . . . .	18
3.3.3	Quasi-potentiel, non-localité et effet cliquet . . . . .	19
3.3.4	Comparaisons aux méthodes par intégrales de chemins . . . . .	20
3.3.5	Limitations et validité de la procédure . . . . .	20
3.3.6	Alternative : resommation de Borel . . . . .	21
3.4	Extension du régime de faible activité . . . . .	21
3.4.1	Resommation par transformée de Borel-Laplace . . . . .	21
3.4.2	Barrière de potentiel <i>vs</i> barrière de force? Limitations et validé de la procédure . . . . .	23
3.5	Extrapolations alternatives par comparaisons aux asymptotes des méthodes intégrales . . . . .	24
3.5.1	Limite de forte activité . . . . .	24
3.5.2	Raccordement à la limite de faible activité . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Processus d'Ornstein-Uhlenbeck actif bidimensionnel</b>	<b>27</b>
4.1	Situation et enjeux : . . . . .	27
4.2	Quasi-potentiel bidimensionnel dans la limite de faible activité . . . . .	28
4.3	Effet de piégeage : localisation par non-localité . . . . .	28
4.3.1	Prédictions théoriques . . . . .	28
4.3.2	Simulations numériques . . . . .	31
4.4	Effet de cliquet par non-localité transverse . . . . .	33
4.4.1	Prédictions théoriques . . . . .	33
4.4.2	Simulations numériques . . . . .	34

<b>5 Conclusion</b>	<b>37</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>39</b>

# Liste des symboles

$\mathcal{W}^\dagger$	Opérateur de Fokker-Planck
$\mathbb{P}$	Probabilité stationnaire
$w$	Processus de Wiener
$\eta$	Bruit blanc gaussien de Langevin
$\mathbb{H}$	Matrice hessienne
$\mathbf{D}$	Vecteur de dérive
$\mathbb{D}$	Matrice de diffusion
$D$	Coefficient de diffusion
$\mathcal{B}[\cdot]$	Transformée de Borel
$\mathcal{L}\{\cdot\}$	Transformée de Laplace
$\mathcal{P}\{\cdot\}$	Approximant de Padé
$\mathcal{D}_h$	Dérivée directionnelle dans la direction $h$
$\nabla$	Vecteur gradient
$\Gamma(\cdot)$	Fonction Gamma
$\tau$	Durée caractéristique de corrélation temporelle
$\Psi$	Quasi-potentiel
$\mathcal{S}_X$	Densité spectrale de puissance du processus $X(t)$
$\gamma$	Coefficient de friction
$\mathbb{T}$	Matrice de parité
$\langle \cdot \rangle$	Corrélateur
$m$	masse
$\delta(\cdot)$	fonction de Dirac
$R_S$	Rayon de convergence de la série $S$
$\nabla_{\mathbf{x}}$	Vecteur gradient par rapport à $\mathbf{x}$
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	Produit vectoriel de $\mathbf{a}$ par $\mathbf{b}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Produit scalaire de $\mathbf{a}$ par $\mathbf{b}$
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\mathbf{J}$	Courant de probabilité



## Chapitre 1

# Introduction

*« Vers où cela allait, ce qui vers nulle part allait ? »  
P. Celan, *Il y avait de la terre en eux**

À la suite de Buffon, Spallanzani ou encore Bywater, Brown et Brongniart décrivent en parallèle (*resp.* Angleterre 1828, France 1827) une première physique des processus stochastiques, appliquée à des situations prenant en considération les fluctuations aléatoires des trajectoires de colloïdes diffusant dans un bain fluide (*e.g.* solvant). Dans cette situation et sur des échelles de temps assez grandes, la dynamique peut être décrite de manière tout à fait convenable par une théorie d'équilibre, dans laquelle, si des corrélations temporelles du bruit existent, elles sont telles que la dynamique est effectivement réversible. Si l'on s'intéresse à des colloïdes nageant, *i.e.* auto-propulsés, non plus en solution fluide, mais plutôt dans un bain lui-même constitué d'agents dont la dynamique, beaucoup plus complexe que celle des molécules d'un simple solvant, induit des corrélations temporelles non-usuelles, *i.e.* des colloïdes conduits hors d'équilibre, leur dynamique ne peut plus être abordée par une théorie d'équilibre. Ces agents du bain possédant une dynamique intrinsèque complexe, ce sont par exemple des êtres unicellulaires (*e.g.* des bactéries).

Ces processus entrent dans le cadre des situations de « matière active » [Ram10], [Ste18] qui constituent une classe singulière de systèmes conduits hors d'équilibre *i.e.* dans lesquels il existe des courants, des flux et de la dissipation [EFW16]. Dans cette classe de matière active, le caractère hors équilibre des situations n'est hérité non pas d'un forçage global qu'une force extérieure pourrait imposer au système depuis l'extérieur (*e.g.* champ électrique, réservoirs de particules, *etc.*), mais d'une dissipation d'énergie, localement, à l'échelle de chacun des agents constituant cette matière. Une approche d'équilibre local est donc inenvisageable pour aborder ces processus dont la dynamique brise la réversibilité [GB19].

Un enjeu qui se pose alors est de comprendre les propriétés générales de ces problèmes de matière active (*e.g.* états stationnaires, problèmes d'échappement *i.e.* transitions entre deux configurations métastables). L'objectif est de construire et de développer des outils formels, calculatoires ou qualitatifs, principaux, fournissant des images puissantes, à l'instar de la théorie de la métastabilité à l'équilibre : pour une particule diffusant à l'équilibre dans un potentiel (*e.g.* équation de Langevin dans la limite de basse température), comprendre la métastabilité (*e.g.* échappement) se réduit à déterminer les lieux des minima et des extrema des barrières, puisque seule la hauteur de la barrière de potentiel à franchir importe et non le détail du paysage complet (*cf.* loi d'Arrhenius). En revanche, dans les dynamiques irréversibles conduites loin de l'équilibre, telles que celles des problèmes de matière active, l'outillage d'équilibre, principalement constitué de la distribution stationnaire de Boltzmann-Gibbs-Maxwell et de la loi d'Arrhenius-Kramers qui en dérive, n'est plus valide.

La visée majeure est donc double : il s'agit d'une part de contribuer à construire des outils théoriques, formels, des procédures sous contrôle, dont les prédictions analytiques sont assez robustes pour être recoupees à des résultats de simulations numériques. D'autre part, il est aussi question de développer des

images (*e.g.* compétition entre les régimes de barrière de potentiel et de barrière de force, *etc.*), *i.e.* des outils qualitatifs, dans la veine de ceux à disposition des situations d'équilibre (*e.g.* barrière de potentiel dans les situations d'échappement d'Arrhenius-Kramers), à inclure dans ce qui pourrait être la panoplie des outils génériques avec lesquels raisonner sur ces problèmes. Un tel arsenal trouverait en effet une implication forte dans l'étude de la métastabilité où pour comprendre, par exemple, des situations en milieux désordonnés, des images permettant d'outrepasser une compréhension fine de la dynamique en proposant un raisonnement autour des états métastables seraient importantes.

La généralisation de la loi d'Arrhenius-Kramers à des situations irréversibles telles qu'abordées dans les problèmes hors d'équilibre de matière active, sera un outil fort pour aborder des questions d'ordre plus générique et sous-jacentes à l'étude de la métastabilité hors équilibre. Dans ce projet, l'accent est mis sur des situations dans lesquelles seuls un minimum et un maximum local d'un paysage de potentiel sont considérés mais de manière plus générale, les résultats pourront être reliés à une théorie hors équilibre générique de la métastabilité. En effet, dans des paysages présentant une série de minima et de maxima (*e.g.* théorie des verres), si l'on étudie la dynamique d'échappement sur des fenêtres temporelles larges et, au moins, à basse température, alors elle se réduit à une dynamique effective de transit entre états métastables, *i.e.* de minima locaux en minima locaux, dans le paysage de potentiel. Cette théorie de la métastabilité des systèmes dissipatifs conduits hors d'équilibre n'est actuellement que très partiellement comprise et offrirait un point de chute ultime aux premiers résultats de ce projet. L'étude de l'échappement d'un état métastable dans un modèle d'AOUP (Active Ornstein-Uhlenbeck particle) avec bruit temporellement corrélé est donc naturellement appelée à être généralisée dans les situations où des collections d'états métastables existent [SRT21], [EWT19], [DMW21]. En somme, construire une image forte de la métastabilité relative à cette situation particulière, en construisant des outils et des procédures théoriques sous contrôle, permettra d'aborder des situations beaucoup moins spécifiques.

Ce projet de recherche a été conduit au sein de l'équipe « Physique Statistique et Modélisation » du Laboratoire Interdisciplinaire de Physique de Grenoble. Il a été supervisé par Vivien Lecomte, dont la bienveillance et le sens de la pédagogie, cumulés à une haute exigence de la pratique et de la culture scientifique ont participé de ce halo de recherche absolument singulier, plaisant et stimulant. Je le remercie encore pour cette opportunité et cette expérience édifiante à bien des égards, scientifiquement, mais aussi et certainement humainement.

Le corps du document s'organise en trois chapitres :

En guise de prélude aux résultats de ce projet, le premier chapitre 2 dresse un état suffisamment précis du paysage des processus stochastiques (*e.g.* Wiener, Brownien passif, Ornstein-Uhlenbeck passif et actif), de leurs propriétés spectrales (*e.g.* corrélations temporelles, spectre en puissance) mais aussi de la caractérisation de leur réversibilité ou irréversibilité stochastique, par des approches trajectorielles qui gagnent à être diffusées. Le problème d'Arrhenius-Kramers de l'échappement d'un état métastable en situation passive est rappelé avant d'entamer la description du modèle clef de cette recherche : le processus d'Ornstein-Uhlenbeck actif, dont les caractères irréversibles et markoviens sont revisités.

Le chapitre 3, noyau de ce document, présente le développement d'une nouvelle procédure locale de dérivation de l'état stationnaire d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck actif, fondée sur l'équation de Fokker-Planck, dans une limite de basse température. Dans un régime de faible activité, les résultats analytiques de ce développement perturbatif correspondent entièrement à ceux pré-existants, prédits par des approches trajectorielles fondées sur les intégrales de chemins. Une extension contrôlée des prédictions de ce régime de faible activité, *i.e.* corrélation, est ensuite mise œuvre, dans l'optique de les raccorder à la limite de forte activité et de comprendre la transition entre ces deux régimes asymptotique.

---

Enfin, une extension de la procédure développée dans le chapitre 3, à un processus d'Ornstein-Uhlenbeck actif bi-dimensionnel est construite dans le chapitre 4. Contrôlée analytiquement à divers stades de ses prédictions et corroborée numériquement, elle fournit une description théorique et prédit l'existence inédite de phénomènes intimement liés à la bi-dimensionnalité et la nature active du processus : un phénomène de piégeage (*cf.* localisation par non-localité) et un phénomène de cliquet (*cf.* cliquet par non-localité transverse).



## Chapitre 2

# Prélude : processus hors d'équilibre, irréversibilité stochastique et matière active

---

2.1	Processus stochastiques réversibles et proche-hors-équilibre . . . . .	5
2.1.1	Processus de Wiener : fluctuations blanches . . . . .	6
2.1.2	Processus d'Ornstein-Uhlenbeck : fluctuations colorées . . . . .	7
2.1.3	Processus Brownien et problème de Kramers : échappement d'un état métastable . . . . .	8
2.2	Processus stochastiques irréversibles, lointain-hors-équilibre et activité . . . . .	9
2.2.1	Processus d'Ornstein-Uhlenbeck Actif . . . . .	9
2.2.2	Irréversibilité . . . . .	10
2.2.3	Dynamique non markovienne . . . . .	10

---

*« Comme nous n'avons pas su prêter suffisamment d'attention à ce discret des influences, s'opérant de proche en proche, voici qu'il nous revient soudain en plein visage. »*

*F. Julien, Les Transformations silencieuses*

### Abstract :

As a prelude to the results of the following research project, a general view of stochastic processes (including Wiener, Brownian and Ornstein-Uhlenbeck ones), their spectral properties and the characterisation of their (ir)-reversibility is set out. We briefly recall the Arrhenius-Kramers escape problem for passive particles evolving between two metastable states of a uni-dimensional potential. The Active Ornstein-Uhlenbeck Process, for which reversible and Markovian properties are discussed in depth, is finally introduced.

**Keywords :** Colored noise . Irreversibility . Kramers escaping . Active Ornstein-Uhlenbeck Process

## 2.1 Processus stochastiques réversibles et proche-hors-équilibre

Etudier un processus stochastique, c'est comprendre l'évolution temporelle d'une grandeur (*e.g.* position) conduite par une quantité prenant des valeurs aléatoires et fluctuantes au cours du temps, appelée bruit. En parallèle de Brogniart (France, 1827), Brown s'attaque à la description et à la compréhension de ces processus de nature stochastique (Angleterre, 1828), en reprenant les travaux de ses prédécesseurs, parmi lesquels Bywater (Angleterre, 1819). Défendu par Faraday, il soutient et affirme l'hypothèse non vitaliste de l'origine des mouvements aléatoires et fluctuants de colloïdes à la surface d'un solvant (*e.g.* suspension de grains de pollen à la surface de l'eau). Sans entrer plus encore dans les détails (*cf.* [Dup]), citons Wiener (Allemagne, 1863) qui continue l'observation du mouvement « Brownien » et écarte certaines prétendues causes (*e.g.* gradients de températures, évaporations, courants de convection, *etc.*) pour préférer chercher sa nature profonde dans le fluide lui-même. Enfin, Einstein et

Smoluchovski achèvent, en parallèle (*resp.* Allemagne 1905 et 1906, Pologne 1906), une description théorique de ces processus stochastiques. Puis Langevin (France, 1808) reprend la description analytique de ce mouvement Brownien en utilisant des équations différentielles stochastiques.

### 2.1.1 Processus de Wiener : fluctuations blanches

#### Fluctuation - Shades of Night

Considérons, par exemple, un colloïde diffusant dans un bain fluide composé de molécules d'eau. Étant donné la surface moyenne des molécules du bain :  $\mathcal{A}_{\text{eau}} \sim 10^{-20} \text{ m}^2$  et celle d'un colloïde :  $\mathcal{A}_{\text{col}} \sim 10^{-12} \text{ m}^2$ , on peut estimer que  $10^8$  molécules du bain interagissent avec la surface de la particule diffusant *i.e.* un nombre considérable de collisions perturbant stochastiquement la dynamique de cette particule sont à prendre en considération. Chacun des incréments du bruit modélisant ces aléas est donc en réalité la somme d'un grand nombre de fluctuations et, par le théorème central limite, si l'on pose que ces fluctuations sont assez décorrélées, alors chaque incrément du bruit est une variable aléatoire gaussienne :

$$\mathbb{P}(dw) = \frac{1}{\sqrt{2\pi dt}} e^{-(dw)^2/2dt}. \quad (2.1.1)$$

Les incréments  $dw$  sont en outre indépendants et equi-distribués. Le processus de Wiener  $W(t)$  est donc un bruit gaussien prenant les valeurs  $w(t)$  au cours du temps ; il est défini par l'intégrale stochastique

$$w(t) = \int_0^t dw(t'). \quad (2.1.2)$$

si l'on s'intéresse dès lors à la couleur des fluctuations décrites par ce processus stochastique, le théorème de Wiener-Kinchin nous permet de relier la densité spectrale de puissance du processus à son auto-corrélateur, par transformation de Fourier :

$$\mathcal{S}_W(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t'} \langle w(t)w(t+t') \rangle dt', \quad (2.1.3)$$

où l'auto-corrélateur (fonction d'auto-corrélation) du processus  $W(t)$  est défini comme

$$\langle w(t)w(t+t') \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T w(t)w(t+t') dt, \quad (2.1.4)$$

soit

$$\begin{aligned} \langle w(t)w(t+t') \rangle &= \int_0^t \langle (dw)^2 \rangle(t'') + \left\langle \int_0^t dw(t'') \int_t^{t+t'} dw(t'') \right\rangle \\ &= \int_0^t dt'' = t. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Il est toutefois plus probant, à ce stade et par consistance avec la suite du document, de transposer l'étude du processus de Wiener à celle du processus de Langevin dont le bruit  $\eta(t)$  peut être symbolisé par  $\eta = \dot{w}$ . Ici, l'opération de dérivation ne fait pas sens d'un point de vue mathématique mais on peut néanmoins exprimer l'auto-corrélateur  $\langle \eta(t)\eta(t+t') \rangle$  de ce bruit de Langevin : pour  $t' \neq 0$ , il est naturellement nul puisque les incréments  $\Delta w(t)$  et  $\Delta w(t+\Delta t)$  du processus de Wiener sont indépendants ; pour  $t' = 0$ ,

$$\langle \eta(t)\eta(t) \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \left( \frac{\Delta w}{\Delta t} \right)^2 \right\rangle, \quad (2.1.6)$$

d'où l'on déduit que  $\langle \eta(t)\eta(t) \rangle \rightarrow \infty$  puisque  $\langle (\Delta w)^2 \rangle = \Delta t$ . L'auto-corrélateur du bruit Gaussien de Langevin  $\langle \eta(t)\eta(t+t') \rangle$  peut donc se lire comme une représentation de la fonction de Dirac :  $\delta(t')$ . Sa densité spectrale de puissance vaut ainsi

$$\mathcal{S}_\eta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t'} \delta(t') dt' = 1, \quad (2.1.7)$$

et l'on peut qualifier ce bruit Gaussien de Langevin de « bruit blanc » en ce sens que son spectre contient toutes les fréquences (même les plus hautes) et ce, avec le même poids, [Flo20].

### 2.1.2 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck : fluctuations colorées

*Do You Dream In Colour ? - Bill Nelson*

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, ici  $X(t)$ , est solution de l'équation différentielle stochastique suivante qui, par ailleurs, admet une solution analytique :

$$\tau \dot{x} = -x + \sqrt{2D} \eta, \quad (2.1.8)$$

avec  $\eta(t)$ , le bruit blanc Gaussien de Langevin (cf. Sec. 2.1.1) :  $\langle \eta(t) \rangle = 0$  et  $\langle \eta(t)\eta(t+t') \rangle = \tau \delta(t')$ . On peut en effet montrer, à l'aide d'un changement de variable, que la solution  $x(t)$  de ce flot dynamique peut être écrite, en fonction du bruit, comme [Flo20] :

$$x(t) = \sqrt{\frac{2D}{\tau^2}} \int_0^t dw(t'') e^{-(t-t'')/\tau}. \quad (2.1.9)$$

$x(t)$  est donc un processus Gaussien en tant que combinaison linéaire de processus de Wiener, de premier moment  $\langle x(t) \rangle = 0$  puisque  $\langle dw(t) \rangle = 0$ . Dès lors, on peut facilement calculer la fonction d'auto-corrélation de ce processus en utilisant le résultat (2.1.9) ; il vient

$$\begin{aligned} \langle x(t)x(t+t') \rangle &= \frac{2D}{\tau^2} e^{-(2t+t')/\tau} \left\langle \int_0^t dw(t'') e^{t''/\tau} \int_0^{t+t'} dw(t''') e^{t'''/\tau} \right\rangle \\ &= \frac{2D}{\tau^2} e^{-(2t+t')/\tau} \int_0^t \langle (dw(t''))^2 \rangle e^{t''/\tau} \\ &= \frac{D}{\tau} e^{-(2t+t')/\tau} \left( e^{2t/\tau} - 1 \right), \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

dont la limite en temps infini, converge vers  $(D/\tau)e^{-|t'|/\tau}$ .  $x(t)$  est donc un bruit Gaussien exponentiellement corrélé en temps et dont la durée caractéristique de corrélation vaut  $\tau$ . Remarquons que dans la limite de fort amortissement  $\tau \rightarrow 0$ ,  $\langle x(t)x(t+t') \rangle \rightarrow \delta(t')$  : le processus d'Ornstein-Uhlenbeck se confond alors avec le processus de Wiener. La densité spectrale de ce processus est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_x(\omega) &= \frac{D}{\tau} \left( \int_0^{+\infty} dt e^{-(i\omega\tau+1)t/\tau} + \int_{-\infty}^0 dt e^{-(i\omega\tau-1)t/\tau} \right) \\ &= D \left( \frac{1}{1+i\omega\tau} + \frac{1}{1-i\omega\tau} \right) \\ &= \frac{2D}{1+(\omega\tau)^2}, \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

permettant ainsi de le qualifier de processus coloré, par contraste au processus décorrélé et blanc de Wiener.

Intéressons nous désormais à la nature, réversible ou non, de cette dynamique d'Ornstein-Uhlenbeck. La question de la réversibilité des dynamiques stochastiques est cruciale et déterminante si l'on veut s'attacher à comprendre le caractère propre des modèles de matière active par rapport aux autres classes de modèles stochastiques. Comment relier certaines propriétés de l'équation stochastique (2.1.8) et de son bruit  $\eta(t)$  à des symétries trajectorielles qui encodent la réversibilité, ou non, de cette dynamique ? Cette réversibilité, ou non, des dynamiques stochastiques, peut être vue sous l'angle des méthodes par intégrales de chemins en comparant la probabilité d'une trajectoire du flot donné, à la probabilité de la trajectoire renversée dans le temps de ce même système. La probabilité d'une « trajectoire » de bruit dans une fenêtre de temps  $[0, t_f]$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\eta(t)] &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^{t_f} dt \int_0^{t_f} dt' \eta(t) \langle \eta(t)\eta(t') \rangle^{-1} \eta(t') \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^{t_f} dt \eta^2(t) \right\}, \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

puisque l'inverse fonctionnel  $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle^{-1}$  du corrélateur  $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \tau \delta(t' - t)$ , défini par

$$\int dt'' \langle \eta(t)\eta(t'') \rangle^{-1} \langle \eta(t'')\eta(t') \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \delta(t - t'), \quad (2.1.13)$$

est encore un delta de Dirac. Le changement de variable menant vers le poids d'une trajectoire  $x(t)$  (une histoire) est ensuite, à un facteur près ( $|\mathcal{D}\eta/\mathcal{D}x|$  est indépendant du processus, ici, donc réabsorbable dans un facteur de normalisation), celui du bruit  $\eta$  en tant que fonction de  $x$  :

$$\mathbb{P}[x(t)] \propto \exp \left\{ -\frac{1}{4D} \int_0^{t_f} dt (\tau \dot{x} + x)^2 \right\}. \quad (2.1.14)$$

Comment percevoir, de ce point de vue trajectorien, la réversibilité de la dynamique Ornstein-Uhlenbeck ? L'idée est d'associer à chaque  $x(t)$  un  $x^R$  tel que, par exemple,  $x(t) = x^R(t_f - t)$ . En opérant ce changement de variable dans l'expression (2.1.14), il vient  $\mathbb{P}[x^R(t)]$  de sorte que

$$\frac{\mathbb{P}[x(t)]}{\mathbb{P}[x^R(t)]} = \exp \left\{ -\frac{\tau}{D} \int_0^{t_f} dt \dot{x}x \right\}, \quad (2.1.15)$$

soit, puisque  $\dot{x}x = \partial_t[x^2/2]$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[x(t)] e^{-\tau x(0)^2/2D} &= \mathbb{P}[x^R(t)] e^{-\tau x(t_f)^2/2D} \\ \mathbb{P}[x(t)] \mathbb{P}_{\text{eq}}(x_0) &= \mathbb{P}[x^R(t)] \mathbb{P}_{\text{eq}}(x_0^R) \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Statistiquement, la trajectoire et son renversé temporel sont indiscernables par la seule donnée de leur mesure trajectorielle [LO21], [LD],.

### 2.1.3 Processus Brownien et problème de Kramers : échappement d'un état métastable

#### *Narrow Escape - The Orchestra of Mirrored Reflections*

Considérons une particule Brownienne massive de masse  $m$ , diffusant dans un potentiel unidimensionnel  $U(x)$ , *i.e.* soumise à une force déterministe  $F(x) = -U'(x)$ . Sous l'hypothèse que la durée caractéristique de libre parcours moyen (entre deux collisions) de cette particule est bien inférieure à celle des pas de temps  $dt$ , *i.e.* que les variations  $dv$  de sa vitesse sont indépendantes entre deux pas

consécutifs,  $v$  peut être décrite comme un bruit gaussien, on peut modéliser la dynamique par [Flo20]

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ m\dot{v} &= -v - U'(x) + \sqrt{2D}\eta \end{cases} \quad (2.1.17)$$

Suivant l'approche de Fokker-Planck-Kolmogorov, il est possible d'écrire l'équation d'évolution de la probabilité  $\mathbb{P}(x, v, t | x_0, v_0, t_0)$ , dépendant de la configuration initiale du système :

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial t} = -v \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{1}{m} (U'(x) + v) \mathbb{P} \right] + \frac{D}{m} \frac{\partial^2 \mathbb{P}}{\partial v^2}, \quad (2.1.18)$$

dont la solution stationnaire redonne la mesure d'équilibre de Boltzmann-Gibbs-Maxwell [PR] :

$$\mathbb{P}(x, v) \propto e^{-U(x)/D - mv^2/2}. \quad (2.1.19)$$

Cette mesure est entièrement locale en  $U$ , en ce sens que seule la valeur prise par le potentiel en  $x$ , et non tous les détails du paysage énergétique, compte, en situation réversible. Cette loi d'équilibre particulièrement simple induit la fameuse loi d'échappement d'Arrhenius-Kramers : dans un régime de basse température,

$$T_{\text{esc}} \propto e^{\Delta U/D}, \quad (2.1.20)$$

avec  $\Delta U = U(x^*) - U_{\min}$ , la barrière de potentiel à franchir, entre un minimum local  $x_{\min}$  et un maximum local  $x^*$ , pour s'échapper d'un état métastable vers un autre.

## 2.2 Processus stochastiques irréversibles, lointain-hors-équilibre et activité

### 2.2.1 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck Actif

Une étape dans la construction d'un modèle jouet de matière active est de considérer le bruit perçu par chacun des agents comme étant coloré puisqu'en matière active, le bruit n'est pas d'origine purement thermique mais possiblement d'origine chimique (*e.g.* réactions moléculaires) voire mécanique (*e.g.* moteurs moléculaires intracellulaires). Considérons toujours un colloïde actif nageant dans un bain. Le bain fluide environnant produit deux effets sur sa dynamique : une dissipation  $-\gamma v$  correspondant à la force de traînée moyenne et une force fluctuante  $\eta(t)$  modélisant les fluctuations thermiques. Le système est désormais conduit hors d'équilibre par l'injection d'énergie au niveau de l'agent (*e.g.* colloïde) : on traduit cette injection locale par une vitesse fluctuante,  $v(t)$ , d'auto-propulsion, temporellement corrélée au bain fluide. En notant  $\zeta(t)$  la somme des bruits  $\eta(t)$  et  $v(t)$ , la dynamique est régie par l'équation de Langevin

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} + \mathcal{F}_{\text{macro}} + \zeta(t). \quad (2.2.1)$$

Si l'on considère un colloïde de diamètre typique  $\phi \sim 10^{-10}$  m et de vitesse moyenne  $v \sim 10^{-5}$  m.s<sup>-1</sup> nageant dans un bain fluide de viscosité  $\nu \sim 10^{-6}$  m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>, le nombre de Reynolds est donné par  $\mathcal{Re} = \phi v / \nu \sim 10^{-5}$ . Ceci nous autorise donc à négliger les effets inertiels *i.e.*  $m\ddot{x} = 0$  ; on parle aussi de régime suramorti. En posant  $\gamma = 1$  et en injectant les contributions thermiques dans le bruit  $v(t)$ , on obtient

$$\dot{x} = -U'(x) + v(t). \quad (2.2.2)$$

Dans cette situation, puisque la vitesse  $v(t)$  joue donc désormais le rôle d'un bruit coloré, présentant une certaine durée de persistance  $\tau$ , elle peut être modélisée par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck [MS88] :  $\tau\dot{v} = -v + \sqrt{2D}\eta$ .

## 2.2.2 Irréversibilité

*Captain Entropy - Bruce Haack*

Dans la classe des modèles actifs, les dynamiques décrites sont fondamentalement irréversibles. Le caractère de cette irréversibilité, signature de l'activité, n'est toutefois pas hérité de la contrainte qu'une force extérieure pourrait exercer globalement sur le système mais émerge de la dynamique de chaque agent qui dissipe lui-même de l'énergie. Dans le point de vue trajectorien, la probabilité d'une « trajectoire » de bruit devient [LD]

$$\mathbb{P}[v(t)] \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^{t_f} dt \int_0^{t_f} dt' v(t) \langle v(t)v(t') \rangle^{-1} v(t') \right\} \quad (2.2.3)$$

Soit le poids d'une trajectoire  $x(t)$  :

$$\mathbb{P}[x(t)] \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^{t_f} dt \int_0^{t_f} dt' (\dot{x} + U'(x))_t \langle v(t)v(t') \rangle^{-1} (\dot{x} + U'(x))_{t'} \right\}. \quad (2.2.4)$$

De même, en définissant le renversé temporel de la trajectoire  $x(t)$ , sous la condition de prendre en compte la parité de la position  $x(t)$  et l'imparité de la vitesse  $v(t)$  par renversement du temps, on obtient  $\mathbb{P}[x^R(t)]$  de sorte que

$$\frac{\mathbb{P}[x(t)]}{\mathbb{P}[x^R(t)]} = \exp \left\{ -\frac{1}{D} \int_0^{t_f} dt \int_0^{t_f} dt' U'(x)_t \langle v(t)v(t') \rangle^{-1} \dot{x}_{t'} \right\} \underset{t_f \rightarrow \infty}{\neq} 1. \quad (2.2.5)$$

À temps infini, ces deux mesures ne sont donc pas indiscernables et en temps fini, l'argument de l'exponentielle n'est pas *a priori* un terme de bord, faisant de ce flot une dynamique irréversible. Remarquons qu'une condition pour que cette dynamique *a priori* active perde son caractère intrinsèquement irréversible, serait que  $\langle v(t)v(t') \rangle^{-1} = \delta(t-t') \Leftrightarrow \langle v(t)v(t') \rangle = \delta(t-t')$  ; *i.e.* qu'il existe une relation (inversion fonctionnelle) entre fluctuations et dissipations dans le modèle. C'est le cas dans la limite où  $\tau \rightarrow 0$ . Sous cette condition, la dissipation d'une perturbation extérieure et l'atténuation d'une fluctuation seraient indiscernables. On lit alors (2.2.5) comme :

$$\mathbb{P}[x(t)] e^{-U(x_0)/D} = \mathbb{P}[x^R(t)] e^{-U(x_{t_f})/D} \quad (2.2.6)$$

Ici, l'irréversibilité de ce modèle actif peut être également comprise plus en amont : du point de vue mésoscopique, la description effective de la dynamique d'un colloïde nageant dans un bain de particules fluides rend compte de l'effet ces particules du bain, de deux manières distinctes : des forces de friction subies par le colloïde se déplaçant dans le bain et un bruit *i.e.* l'effet (coarse-grainé) de l'ensemble des particules fluides. Si le problème lui-même est réversible, alors ces deux effets mésoscopiques générés par le bain (friction et bruit) sont liés l'un à l'autre et briser ce lien, c'est briser la réversibilité de la dynamique. C'est donc précisément ce lien entre fluctuation et dissipation que la dynamique du processus d'Ornstein-Uhlenbeck actif brise [LC21].

## 2.2.3 Dynamique non markovienne

La dynamique modélisée par le processus d'Ornstein-Uhlenbeck actif sur la position  $x(t)$  :  $\dot{x} = -U'(x) + v$ , où  $v(t)$  est un bruit corrélé, est une dynamique non-markovienne en ce sens que, même si l'évolution de  $v(t)$  est markovienne *i.e.* que les incréments  $dv$  sont mutuellement indépendants entre deux pas  $dt$ , l'évolution de  $x(t)$  dépend néanmoins de l'histoire passée de  $v(t)$ . A ce stade, ce caractère non-Markovien sur la variable  $x(t)$  est donc une entrave à la mise en oeuvre des méthodes de Fokker-Planck-Kolmogorov fondée sur la nature Markovienne des processus (*cf.* relation de Chapman-Kolmogorov).

Si l'on considère, non pas le processus  $x(t)$  mais le processus joint  $\{x(t), v(t)\}$ , la dynamique devient markovienne [MS88], [PR]. L'idée est donc, partant d'une dynamique sur  $x(t)$  conduite par un bruit coloré  $v(t)$ , de se ramener à une dynamique conduite par un bruit décorrélé  $\eta(t)$  en considérant  $v(t)$  comme une variable auxiliaire du processus :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -U'(x) + v \\ \tau \dot{v} &= -v + \sqrt{2D}\eta \end{cases} . \quad (2.2.7)$$

Ayant élargi l'espace des phases, on peut alors mettre en œuvre les méthodes valables pour les processus Markoviens *e.g.* Fokker-Planck-Kolmogorov.



## Chapitre 3

# Statistique stationnaire unidimensionnelle d'une particule Ornstein-Uhlenbeck active

---

3.1	Situation et enjeux : échappement d'un état métastable hors d'équilibre . . . . .	14
3.2	Approche locale : Fokker-Planck . . . . .	15
3.2.1	De Langevin à Fokker-Planck . . . . .	15
3.2.2	Contrainte de réversibilité - Potentiel harmonique . . . . .	15
3.2.3	Limite de basse température : principe de grande déviation . . . . .	16
3.3	Régime de faible activité . . . . .	17
3.3.1	Résultats préexistants : . . . . .	17
3.3.2	Méthode formelle pour la dérivation du quasi-potentiel . . . . .	18
3.3.3	Quasi-potentiel, non-localité et effet cliquet . . . . .	19
3.3.4	Comparaisons aux méthodes par intégrales de chemins . . . . .	20
3.3.5	Limitations et validité de la procédure . . . . .	20
3.3.6	Alternative : resommation de Borel . . . . .	21
3.4	Extension du régime de faible activité . . . . .	21
3.4.1	Resommation par transformée de Borel-Laplace . . . . .	21
3.4.2	Barrière de potentiel <i>vs</i> barrière de force? Limitations et validé de la procédure . . . . .	23
3.5	Extrapolations alternatives par comparaisons aux asymptotes des méthodes intégrales . . . . .	24
3.5.1	Limite de forte activité . . . . .	24
3.5.2	Raccordement à la limite de faible activité . . . . .	24

---

*« Une limite ne se touche pas »  
J. Derrida, Du droit à la philosophie*

### Abstract :

Since active Ornstein-Uhlenbeck particles, *i.e.* overdamped particles evolving in a potential and subject to a noisy self-propulsion velocity, can be mapped into a system of underdamped particles under additional velocity dependent forces modeled by an Ornstein-Uhlenbeck process and subject to a white noise, one is able to provide a Fokker-Planck-Kolmogorov based analysis in a low temperature regime. By resorting to a very first idea developed by Kłosek-Dygas, Matkowsky and Schuss [MS88], one can build a generic procedure allowing us to compute analytically each coefficient of the perturbative expansion of the stationary distribution in a limit of weak activity, *i.e.* weak temporal correlations of the noise. Motivated by the concordance between our results and the pre-existing ones derived by paths integrals methods, we develop a controlled extension of the weak activity regime based on Borel-Laplace resummation procedure for divergent series, in view of reaching the strong activity limit and understanding the expected undergoing phase transition.

**Keywords :** Low temperature regime . Laplace-Borel resummation . Fokker-Planck based quasi-potential . Weak-strong activity junction .

### 3.1 Situation et enjeux : échappement d'un état métastable hors d'équilibre

Comme noyau de ce projet, on s'intéresse donc à l'étude des propriétés stationnaires (*e.g.* distribution de probabilité) du processus d'Ornstein-Uhlenbeck actif (AOUP) et à l'échappement d'un état métastable par une particule Ornstein-Uhlenbeck active évoluant dans un potentiel uni-dimensionnel :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -U'(x) + v \\ \tau \dot{v} &= -v + \sqrt{2D} \eta \end{cases}, \quad (3.1.1)$$

en rappelant que  $\eta(t)$  est un bruit blanc Gaussien *i.e.*  $\langle \eta(t) \rangle = 0$  et  $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \delta(t-t')$ ; faisant de  $v(t)$  un bruit coloré, exponentiellement corrélé :  $\langle v(t)v(t') \rangle = (D/\tau)e^{-|t-t'|/\tau}$ , avec un temps de corrélation  $\tau$  : durée caractéristique pendant laquelle un agent garde la mémoire de l'histoire de son interaction avec le bain. On peut d'ores et déjà discerner deux limites : (1)  $\tau \rightarrow 0$  : l'agent est très peu sensible (corrélé) au bain, quasiment aucune mémoire de l'histoire des interactions passées avec les particules du bain n'est conservée. (2)  $\tau \rightarrow \infty$  : l'agent est beaucoup plus sensible au bain qu'à l'environnement qu'il perçoit *i.e.* la particule est très fortement corrélée à son bain. Ce régime-là représente des situations pour lesquelles les interactions internes au bain sont telles que sa relaxation est extrêmement lente.

Cette problématique de l'échappement est elle-même reliée à des problèmes de transport en ce sens que la durée caractéristique d'échappement est directement liée au courant qui traverse le système entre deux points. En mécanique statistique d'équilibre, ce temps d'échappement est donné par la loi d'Arrhénius-Kramers : dans une limite de basse température, pour une dynamique réversible, le temps d'échappement (Mean First Passage Time) suit  $T_{\text{esc}} \propto e^{\Delta U/T}$  *i.e.* seule la hauteur de la barrière de potentiel à franchir importe. On s'intéresse ici au problème de l'échappement dans la dynamique d'Ornstein-Uhlenbeck active unidimensionnelle : Comment transporter, transposer, transformer cette image fructueuse à l'équilibre en terme de barrière de potentiel, vers des situations de matière active conduites hors d'équilibre et irréversibles, en présence d'un bruit coloré ? Quelle est alors la distribution stationnaire d'un tel processus ?

Les comportements asymptotiques dans les régimes d'activité ont déjà été exhibés par des méthodes qui seront évoquées Sec. 3.3 :

- Un régime de petit temps de corrélation (*cf.* (1)), *i.e.* de faible activité : c'est une situation limite pour laquelle la distribution stationnaire de probabilité et le temps d'échappement sont régis par la hauteur de la barrière de potentiel à franchir pour s'échapper de l'état métastable, mais où des termes correctifs doivent être pris en compte ; c'est un régime de barrière de potentiel.
- Un régime de grand temps de corrélation (*cf.* (2)), *i.e.* de forte activité : ce régime constitue une situation limite pour laquelle l'état stationnaire et le temps d'échappement d'un état métastable sont entièrement régis par le point de force maximale *i.e.* le point de pente maximale du potentiel ; c'est un régime de barrière de force, par contraste au régime de barrière de potentiel.

Comment comprendre le passage d'une situation dans laquelle la barrière de potentiel domine la question de l'échappement, à une situation dans laquelle c'est une barrière de force qui domine ? Existe-t-il une transition de phase entre ces deux régimes ?

## 3.2 Approche locale : Fokker-Planck

### 3.2.1 De Langevin à Fokker-Planck

Ayant élargi l'espace des phases de la dynamique à l'ensemble des variables du processus joint  $\{x, v\}$  ([MS88], il est désormais possible de mettre en oeuvre les approches de Chapman-Kolmogorov, valides pour l'étude des processus markoviens, dans le cadre de cette dynamique d'Ornstein-Uhlenbeck active. Suivant [MS88], le changement de variable  $\tilde{v} \leftarrow v - U'(x)$  est consistant et autorise à réécrire le système d'équations différentielles stochastiques (3.1.1) sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ \tau \dot{\tilde{v}} &= -\left(\frac{1}{\tau}U''(x) + 1\right)\tilde{v} + \sqrt{2D}\eta \end{cases}, \quad (3.2.1)$$

dont le vecteur de dérive  $\mathbf{D}$  et la matrice de diffusion  $\mathbb{D}$  associés sont

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ -(U''(x) + \frac{1}{\tau})\tilde{v} - \frac{1}{\tau}U'(x) \end{pmatrix}; \quad \mathbb{D} = \frac{2D}{\tau^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.2)$$

L'équation de Fokker-Planck  $\partial_t \mathbb{P} = \mathcal{W}^\dagger \mathbb{P}$  associée au flot (3.2.1) et décrivant l'évolution temporelle de la distribution de probabilité  $\mathbb{P}$  des états du processus, est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^\dagger \mathbb{P} &= -\nabla \cdot \left( \mathbf{D}\mathbb{P} - \frac{1}{2}\nabla \cdot (\mathbb{D}\mathbb{P}) \right) \\ &= \left( U''(x) + \frac{1}{\tau} \right) \mathbb{P} + \left( \frac{1}{\tau}U'(x) + \tilde{v}U''(x) + \frac{\tilde{v}}{\tau} \right) \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \tilde{v}} - \tilde{v} \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial x} + \frac{D}{\tau^2} \frac{\partial^2 \mathbb{P}}{\partial \tilde{v}^2}, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

qui, dans l'état stationnaire, est nul; fournissant ainsi une équation sur la distribution stationnaire de probabilité :  $\mathcal{W}^\dagger \mathbb{P} = 0$ ,  $\mathcal{W}^\dagger$  désignant l'opérateur différentiel linéaire de Fokker-Planck. On appelle  $\mathbf{J} = \mathbf{D}\mathbb{P} - \frac{1}{2}\nabla \cdot (\mathbb{D}\mathbb{P})$ , le courant de probabilité. Là où l'étude des équations différentielles stochastiques ne produit aucune information relative à la distribution stationnaire de probabilité, la formulation Fokker-Planck du processus permet donc d'aborder la question de l'état stationnaire mais fournit aussi des outils quand à la description des durées de premier passage du processus.

### 3.2.2 Contrainte de réversibilité - Potentiel harmonique

Du point de vue descriptif adopté dans le chapitre 2, contraindre l'égalité, à un terme de bord près, des probabilités d'une histoire et de son renversé dans le temps, *i.e.* contraindre la réversibilité microscopique de la dynamique, est équivalent à imposer un courant de probabilité  $\mathbf{J}$  non seulement de divergence nulle dans l'état stationnaire, mais également proprement nul lui-même. Les contraintes pour qu'un processus de Markov homogène admette une distribution stationnaire  $\mathbb{P}(\mathbf{z})$ , du vecteur d'état  $\mathbf{z} = (x, \tilde{v})$ , satisfaisant cette condition de réversibilité, ou encore de bilan détaillé, sont [Flo20] :

$$\begin{cases} \mathbb{T} \mathbf{D}(\mathbb{T}\mathbf{z}) \mathbb{P}(\mathbf{z}) &= -\mathbf{D}(\mathbf{z})\mathbb{P}(\mathbf{z}) + \nabla \cdot (\mathbb{D}(\mathbf{z})\mathbb{P}(\mathbf{z})) \\ \mathbb{T}^2 \mathbb{D}(\mathbb{T}\mathbf{z}) &= \mathbb{D}(\mathbf{z}) \end{cases}, \quad (3.2.4)$$

où  $\mathbb{T}$  signe la matrice de parité telle que sous le renversement du temps  $t \rightarrow -t$ , le vecteur d'état  $\mathbf{z}$  se transforme comme  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbb{T}\mathbf{z}$ , soit

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.5)$$

La projection de la première équation imposée par la contrainte de réversibilité, sur la composante  $\tilde{v}$  de  $\mathbf{z}$ , conduit à

$$\left( U''(x) + \frac{1}{\tau} \right) \tilde{v} \mathbb{P} = \frac{D}{\tau^2} \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \tilde{v}}, \quad (3.2.6)$$

dont une solution s'écrit

$$\mathbb{P}(x, \tilde{v}) = \kappa(x) \exp \left\{ -\frac{1}{D\tau^2} \left( U''(x) + \frac{1}{\tau} \right) \tilde{v}^2 \right\}, \quad (3.2.7)$$

avec  $\kappa(x)$ , une constante d'intégration, fonction de  $x$ . En réinjectant cette forme d'une distribution stationnaire contrainte par la condition de réversibilité dans l'équation de Fokker-Planck [Flo20], on obtient que  $\kappa(x)$  est bien une fonction de  $x$  si et seulement si  $U'''(x) = 0$ . Une condition nécessaire à la réversibilité du processus d'Ornstein-Uhlenbeck actif tel que décrit microscopiquement par les équations (3.2.1) est ainsi que le potentiel  $U(x)$  soit quadratique en  $x$ ; *i.e.* la réduction au problème de l'échappement harmonique, avec  $U$  de la forme  $U(x) = a^2 x^2 / 2$ , pour lequel la distribution stationnaire unidimensionnelle prend la forme analytique

$$\mathbb{P}(x, \tilde{v}) = \exp \left\{ -\frac{1}{D} \left( \frac{\tau a^2 \tilde{v}^2}{2} + \frac{\tau}{2} (a^4 x^2 + \tilde{v}^2) + \frac{a^2 x^2}{2} \right) \right\}, \quad (3.2.8)$$

ne faisant intervenir uniquement des contributions locales du potentiel. Bonilla retrouve cette condition de réversibilité sur  $U'''(x)$  en exploitant un théorème sur la forme temporellement renversée des équations de Langevin-Itô du processus AOU (3.1.1).

### 3.2.3 Limite de basse température : principe de grande déviation

#### *A Question of Temperature - Balloon farm*

On s'intéresse désormais, et pour la suite de l'étude, à une limite de basse température, *i.e.* de faible amplitude de bruit, en revenant bien sûr au cas d'un potentiel  $U$  général dont on impose juste qu'il soit confinant à grands  $x$  pour des raisons d'existence d'une distribution stationnaire du processus. Cette limite  $D \rightarrow 0$  est équivalente à considérer, dans cadre d'un problème d'échappement, que la barrière de potentiel  $\Delta U$  à franchir pour transiter entre deux états métastables est grande devant  $D$ . L'idée est qu'il est alors possible d'approximer la forme de la distribution stationnaire de probabilité par une loi de grande déviation, ou de type Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) :

$$\mathbb{P}(x, \tilde{v}) \underset{D \rightarrow 0}{\sim} e^{-\Psi(x, \tilde{v})/D}, \quad (3.2.9)$$

en introduisant une nouvelle fonction  $\Psi(x, \tilde{v})$  des variables d'état : le quasi-potentiel. Dans cette limite de faible bruit, l'équation de Fokker-Planck  $\mathcal{W}^\dagger \mathbb{P} = 0$  sur la distribution stationnaire  $\mathbb{P}$ , devient une équation d'Hamilton-Jacobi :

$$\tilde{v} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \left( \tilde{v} U''(x) + \frac{\tilde{v}}{\tau} + \frac{1}{\tau} U'(x) \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{v}} + \frac{1}{\tau^2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{v}} \right)^2 = 0, \quad (3.2.10)$$

non linéaire en  $\Psi$  mais désormais du premier ordre, *i.e.* la seule condition aux limites  $|\Psi| \xrightarrow{|x|, |\tilde{v}| \rightarrow \infty} 0$  suffit à déterminer  $\Psi$ , là où des discussions plus subtiles sur les conditions aux bords (*e.g.* Neumann, Cauchy) auraient été inévitables avec l'équation de Fokker-Planck.

### 3.3 Régime de faible activité

#### 3.3.1 Résultats préexistants :

Plusieurs pistes ont déjà permis d'exhiber l'état stationnaire, ou le quasi-potentiel, du processus d'Ornstein-Uhlenbeck actif unidimensionnel dans un régime de faible activité. Scindées en deux classes : les approches intégrales et les approches locales, elles permettent d'obtenir des expressions analytiques exactes, par des procédures sous contrôle :

- **Méthodes par intégrales de chemins :**

La durée d'échappement étant entièrement contrôlée par la trajectoire optimale reliant le point de potentiel minimum au point de franchissement de la barrière, des approches par intégrale de chemins, telles que celle de Martin-Siggia-Rose-Janssen-De Dominicis [EWL20], permettent de sonder non seulement le temps d'échappement,  $T_{\text{esc}} \propto e^{\Psi(x^*)}$ ,  $x^*$  étant le lieu du maximum de  $\Psi$ , mais aussi la distribution stationnaire  $\mathbb{P} \propto e^{-\Psi(x)}$ , dans la limite de basse température. Cette méthode permet d'exhiber les expressions analytiques de la distribution stationnaire de probabilité dans les régimes limites de faible et de forte activité. Un contre-coup technique, non négligeable, de cette mise en oeuvre émerge cependant de l'existence de couches limites temporelles. En effet, il existe bien une trajectoire optimale, instanton de l'action de Martin-Siggia-Rose-Janssen-De Dominicis, connue pour  $\tau = 0$  mais à moins que le point final de cette trajectoire coïncide avec le point maximal de la barrière, il n'existe pas de schéma perturbatif simple de cette trajectoire optimale, en puissance de  $\tau$  (sauf pour une fenêtre  $|t - t_f| \sim \mathcal{O}(\tau)$ ). Les instantons du développement se mettent eux-même à dépendre de  $\tau$  et il faut discerner deux régimes (dont une couche limite), avant d'opérer un raccordement.

Une autre approche analytique de la distribution stationnaire du processus d'Ornstein-Uhlenbeck actif unidimensionnel dans un régime de faible activité est présentée par Bray-McKane-Newman [AJBN90], [AJMB90]. Un développement du quasi-potentiel  $\Psi(x)$  y est dérivé dans le cas où la position finale de la trajectoire d'échappement est celle du point de maximum local du potentiel *i.e.*  $x^*$ . Par contraste avec l'approche de Martin-Siggia-Rose-Janssen-De Dominicis, celle-ci présente l'avantage de court-circuiter les subtilités techniques héritée des couches limites en proposant un changement de variable astucieux du lagrangien de l'action. Elle n'est cependant valable que pour une évaluation de  $\Psi$  en  $x^*$ .

- **Procédure de Chapman-Enskog sur l'état stationnaire de l'équation de Fokker-Planck :**

Héritée des schémas d'approximation de l'hydrodynamique statistique, la méthode proposée par Bonilla [Bon19], met en oeuvre une approche locale, basée sur l'équation de Fokker-Planck. L'expansion de Chapman-Enskog de cette équation permet d'exhiber un développement perturbatif entièrement contrôlé, après rééchelage en temps.

Au delà de ces approches dont les résultats des procédures sont absolument sous contrôle, il existe d'autres méthodes, non entièrement contrôlées, *e.g.* Approximation de Fox, ou encore approximation Unifiée du Bruit Coloré (*cf.* Unified Colored Noise Approximation, UCNA) [JH87]. Dans ses grandes lignes, l'approche UCNA exposée par Jung et Hänggi [JH87] procède d'une élimination quasi-adiabatique de la variable  $\tilde{x}$ , des équations de Langevin, dans la limite de faible activité  $\tau \rightarrow 0$ .

Étudier analytiquement la distribution stationnaire d'un processus tel que celui d'Ornstein-Uhlenbeck actif relève donc d'un problème hautement non-trivial pour lequel obtenir des résultats sous contrôle constitue déjà un « graal » en soi.

### 3.3.2 Méthode formelle pour la dérivation du quasi-potentiel

*Main Theme - Pink Floyd*

Inspiré par les arguments mis en place dans [MS88] jusqu'au deuxième ordre, on se propose d'étudier des solutions stationnaires de l'équation de Fokker-Planck du processus d'Ornstein-Uhlenbeck actif unidimensionnel, fondées sur une théorie de perturbations en puissance du temps de corrélation  $\tau$  autour de  $\tau = 0$ . L'objectif est d'exhiber une méthode formelle et générique permettant d'aboutir à l'expression analytique de chacun des coefficients de ce développement. Dans ce régime de faible activité, le développement perturbatif du quasi-potentiel prend la forme :

$$\Psi^{p_{\max}}(x, \tilde{v}, \tau) \underset{\tau \rightarrow 0}{\sim} \sum_{p=0}^{p_{\max}} \Psi_p(x, \tilde{v}) \tau^p + \mathcal{O}(\tau^{p_{\max}+1}). \quad (3.3.1)$$

Dans [MS88], Kłosek-Dygas, Matkowsky et Schuss dérivent les expressions de  $\Psi_0(x, \tilde{v})$  et des corrections  $\Psi_1(x, \tilde{v})$  et  $\Psi_2(x, \tilde{v})$  en arguant des conditions de non-singularité sur ces coefficients. Rappelons la méthode : suivant [MS88], à l'ordre zéro, en gardant uniquement le terme dominant en  $\tau \rightarrow 0$ , l'équation d'Hamilton-Jacobi (3.2.10) devient  $(\partial_{\tilde{v}} \Psi_0)^2 = 0$ , c'est-à-dire  $\Psi_0(x, \tilde{v}) = \Psi_0(x)$ . L'unique possibilité étant que  $\Psi_0(x) = \Delta U(x) = U(x) - U_{\min}$ , puisqu'il est nécessaire de recouvrir la loi d'équilibre de Boltzmann-Gibbs. Au premier ordre, le terme dominant de l'équation (3.2.10) se lit  $\tilde{v} \partial_x \Psi_0 - (\tilde{v} + U'(x)) \partial_{\tilde{v}} \Psi_1 + (\partial_{\tilde{v}} \Psi_1)^2 = 0$ , *i.e.* une équation binômiale en  $\partial_{\tilde{v}} \Psi_1$ . La solution de cette équation est  $\Psi_1(x, \tilde{v}) = \tilde{v}^2/2 + K_1(x)$ . L'idée est alors de déterminer la fonction  $K_1(x)$ , à ce stade inconnue, en étudiant les conditions de non-singularité de la correction à l'ordre suivant *i.e.*  $\Psi_2(x, \tilde{v})$  : l'équation vérifiée par  $\Psi_2(x, \tilde{v})$  s'écrit  $\tilde{v} K_1'(x) - U''(x) \tilde{v}^2 + (y - U'(x)) \partial_{\tilde{v}} \Psi_2 = 0$ . On en déduit que  $\Psi_2(x, \tilde{v})$  est une primitive de  $(U''(x) \tilde{v}^2 - \tilde{v} K_1'(x))/(\tilde{v} - U'(x))$ , potentiellement singulière. Une condition de régularité impose donc que  $U''(x) \tilde{v}^2 - \tilde{v} K_1'(x) = 0$ , d'où  $K_1(x) = U'(x)^2/2$ .

En s'inspirant de ces arguments de régularité aussi puissants qu'inhabituels dans l'arsenal des méthodes de la mécanique statistique, il est possible de construire une procédure générique propageant de manière récursive les expressions analytiques des  $\Psi_{p \geq 2}(x, \tilde{v})$ . Etant donné un  $p_{\max}^{\text{num}}$  et sachant que le coefficient  $\Psi_{p_{\max}-1}(x, \tilde{v})$  prend la forme  $\tilde{\Psi}_{p_{\max}-1}(x, \tilde{v}) + K_{p_{\max}-1}(x)$ , avec  $K_{p_{\max}-1}(x)$  une fonction inconnue de la position, c'est l'application d'arguments de régularité sur le coefficient suivant :  $\Psi_{p_{\max}}(x, \tilde{v})$ , qui permet de rétro-déterminer  $K_{p_{\max}-1}(x)$  :

---

**Algorithme 1** : Dérivation des coefficients  $\Psi_p(x, \tilde{v})$  du développement perturbatif

---

$p_{\max} = 2, p_{\max}^{\text{num}} \geq 2$  ;

$\Psi_{p_{\max}-1}(x, \tilde{v}) = \tilde{\Psi}_{p_{\max}-1}(x, \tilde{v}) + K_{p_{\max}-1}(x), \Psi_0(x, \tilde{v}) = U(x)$

**while**  $p_{\max} < p_{\max}^{\text{num}}$  **do**

HJ $^{p_{\max}}$   $\leftarrow$  Insertion du développement  $\Psi^{p_{\max}}$  dans l'équation d'Hamilton-Jacobi (3.2.10) ;

Expansion d'HJ $^{p_{\max}}$  en puissance de  $\tau$  jusqu'à l'ordre  $p_{\max} + 1$  ;

Sélection du terme dominant en  $\tau$  dans la limite  $\tau \rightarrow 0$  *i.e.* coefficient de l'ordre  $\tau^{p_{\max}-1}$  ;

$\partial_{\tilde{v}} \Psi_{p_{\max}} \leftarrow$  Annulation du terme dominant;

Décomposition en éléments simples de  $\partial_{\tilde{v}} \Psi_{p_{\max}}$  ;

$K_{p_{\max}-1}(x) - c_{p_{\max}-1} \leftarrow$  Condition de régularité sur la partie singulière de la décomposition ;

$c_{p_{\max}-1} \leftarrow$  Normalisation du quasipotentiel :  $\Psi^{p_{\max}-1}(x_{\min}) = U_{\min}$ ;

$p_{\max} \leftarrow p_{\max} + 1$

**end**

---

Puis l'on se ramène au quasi-potentiel réduit,  $\Psi(x, \tau)$ , en sommant la probabilité mixte  $\mathbb{P}(x, \tilde{v})$  sur les valeurs possibles de  $\tilde{v}$  : Par méthode du point col, à  $D \rightarrow 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} e^{-\Psi(x, \tau)/D} &= \int d\tilde{v} e^{-\Psi(x, \tilde{v}, \tau)/D} \\ &\sim e^{-\min_{\tilde{v}} \{\Psi(x, \tilde{v}, \tau)\}/D}. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Ainsi,

$$\Psi(x, \tau) = \min_{\tilde{v}} \{\Psi(x, \tilde{v}, \tau)\}, \quad (3.3.3)$$

soit, en pratique  $\Psi(x, \tau) = \Psi(x, 0, \tau)$ .

### 3.3.3 Quasi-potentiel, non-localité et effet cliquet

La mise en œuvre de cette procédure jusqu'au huitième ordre permet non seulement de retrouver les deux premières corrections  $\Psi_1(x, \tilde{v})$  et  $\Psi_2(x, \tilde{v})$  de [EWL20], mais aussi d'exhiber d'autres corrections :

$$\Psi(x, \tau) \underset{\tau \rightarrow 0}{\sim} \Delta U(x) + \tau \frac{1}{2} U'(x)^2 - \tau^2 \frac{1}{2} \int_{x_{\min}}^x dx' U'(x')^2 U'''(x') + \tau^3 \frac{5}{12} U'(x)^3 U'''(x) - \tau^4 + \dots + \mathcal{O}(\tau^9), \quad (3.3.4)$$

avec  $\Delta U(x) = U(x) - U_{\min}$ . La correction au deuxième ordre ( $\mathcal{O}(\tau^2)$ ) est bien une correction non-locale [EWL20] confirmant que la probabilité de présence d'une particule Ornstein-Uhlenbeck active, en un point de position donnée dépend désormais du paysage global du potentiel, et non uniquement de propriétés locales (*e.g.* hauteur de la barrière de potentiel dans les modèles de matière passive). Il s'agit de la trace d'un effet cliquet encodé par la nature active du modèle AOUP. En effet, à  $\tau \neq 0$ , pour deux barrières de potentiel de hauteur égale mais de pentes différentes, le temps d'échappement ne sera pas dans une direction ou dans l'autre. Par ailleurs, dans les situations où  $\tau = 0$ , *i.e.* dynamiques passives, la distribution stationnaire  $\mathbb{P}(x) \sim e^{-\Psi(x)/D}$  est bien conforme à la loi d'équilibre de Boltzmann-Kramers et le temps d'échappement d'un état métastable  $T_{\text{esc}} \sim e^{\Psi(x^*)/D} = e^{\Delta U(x^*)/D}$  redonne également la loi d'équilibre d'Arrhenius-Kramers. Enfin, ce développement du quasi-potentiel en puissances du temps de corrélation est une série alternée dont les termes des puissance paires de  $\tau$  sont des corrections non-locales.

On constate que le quasi-potentiel semble toujours atteindre son maximum au point  $x^*$  tel que  $U(x^*) = U_{\max}$  pour des potentiel de type Landau ou cosinus, et ce pour une fenêtre de  $\tau$  acceptable par rapport au nombre de termes correctifs pris en compte dans le développement perturbatif. Une autre quantité qu'il est aussi pertinent d'étudier dans une optique de caractérisation de l'échappement, est

$$\Delta \Psi(\tau) = \Psi(x^*) - \Psi(x_{\min}) \underset{\tau \rightarrow 0}{\sim} \Delta U(x^*) - \tau^2 \frac{1}{2} \int_{x_{\min}}^{x^*} dx' U'(x')^2 U'''(x') - \tau^4 2 \int_{x_{\min}}^{x^*} dx' \dots + \dots + \mathcal{O}(\tau^{10}), \quad (3.3.5)$$

puisque en effet,  $T_{\text{esc}} \propto e^{\Delta \Psi(\tau)/D}$  et que l'on possède une forme explicite du développement perturbatif du quasi-potentiel. A titre d'exemple, dans le cas particulier pour lequel  $U(x) = A \cos(x)$ ,

$$\Delta \Psi(\tau) \underset{\tau \rightarrow 0}{\sim} A + \frac{2A^3}{3} \tau^2 - \frac{16A^5}{15} \tau^4 + \frac{176A^7}{35} \tau^6 - \dots + \mathcal{O}(\tau^{10}) \quad (3.3.6)$$

### 3.3.4 Comparaisons aux méthodes par intégrales de chemins

#### Le Chemin - La Femme

Le résultat analytique (3.3.4) de la procédure construite Sec. 3.3.2 concorde non seulement avec les expansions des méthodes par intégrales de chemins à faible activité, mais permet aussi d'obtenir des ordres inaccessibles, à  $x$  quelconque, aux méthodes par intégrales de chemins [EWL20], [AJBN90]. En outre, cette procédure implémentable systématiquement permet de contourner les contres-coups techniques apparaissant dans les approches trajectorielles. En effet, on retrouve d'une part le développement établi par Woillez, Kafri et Lecomte (WKL), puisque  $\Psi^2(x, \tau) = \Psi_{\text{WKL}}(x, \tau)$  :

$$\Psi_{\text{WKL}}(x, \tau) \underset{\tau \rightarrow 0}{\sim} \Delta U(x) + \tau \frac{1}{2} U'(x)^2 - \tau^2 \frac{1}{2} \int_{x_{\min}}^x dx' U'(x')^2 U'''(x') + \mathcal{O}(\tau^3). \quad (3.3.7)$$

D'autre part, en évaluant  $\Delta\Psi(\tau)$ , on est également en mesure de recouper les résultats présentés par Bray, McKane et Newman (BMN), [AJBN90], [AJMB90], valide pour une position finale de la trajectoire d'échappement qui correspond au maximum de la barrière de franchissement, *i.e.*  $x^*$  :

$$\Delta\Psi_{\text{BMN}}(\tau) \underset{\tau \rightarrow 0}{\sim} \Delta U(x^*) + \tau^2 \int_{x_{\min}}^{x^*} dx' U'(x') U''(x')^2 - \tau^4 \int_{x_{\min}}^{x^*} dx' U'(x')^3 U'''(x')^2 + \dots + \mathcal{O}(\tau^9). \quad (3.3.8)$$

(3.3.8) correspond donc aussi au résultat (3.3.4) de la procédure construite en amont, puisque, si l'on pose  $\Delta\Psi(\tau) = \int_{x_{\min}}^{x^*} dx' \Phi(x', \tau)$  et  $\Delta\Psi_{\text{BMN}}(\tau) = \int_{x_{\min}}^{x^*} dx' \Phi_{\text{BMN}}(x', \tau)$ , on peut toujours écrire

$$\Phi(x, \tau) = \Phi_{\text{BMN}}(x, \tau) + \frac{d\phi}{dx}, \quad (3.3.9)$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} \Delta\Psi(\tau) &= \int_{x_{\min}}^{x^*} dx' \Phi_{\text{BMN}}(x') + [\phi(x)]_{x_{\min}}^{x^*} \\ &= \Delta\Psi_{\text{BMN}}(\tau). \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

En somme, le développement analytique du quasi-potentiel résultant de la procédure Sec. 3.3.2 est celui qui permet d'obtenir le plus de corrections et d'une manière la plus systématique, pour n'importe quelle valeur de  $x$  donnée.

### 3.3.5 Limitations et validité de la procédure

Le développement perturbatif (3.3.4) du quasi-potentiel, dérivé par la procédure Sec. 3.3.2, aboutit donc à une série alternée dont l'amplitude des termes croît avec l'ordre; en d'autres termes, ce développement est une série non-absolument convergente. Autrement dit, le rayon de « validité » en  $\tau$  du développement diminue à mesure que  $p_{\max}$  augmente, *i.e.* à mesure que les corrections s'ajoutent aux ordres précédents. Une manière de le voir est d'examiner le comportement à grand  $p$  de l'amplitude des termes du développement. Or d'après le critère de Cauchy-Hadamard sur la convergence des séries entières, le rayon de convergence  $R_{\Psi}$  du développement perturbatif est donné par

$$\frac{1}{R_{\Psi}} = \limsup_{p \rightarrow \infty} |\Psi_p(x)|^{1/p}, \quad (3.3.11)$$

c'est-à-dire, ici,  $R_{\Psi} = 0$ . De manière pratique,  $\Psi^{p_{\max}}(x, \tau)$  ne converge que sur une fenêtre finie  $[0, \tau_{\max}]$ , avec  $\tau_{\max}$ , une fonction décroissante de  $p_{\max}$ .

### 3.3.6 Alternative : resommation de Borel

Une alternative possible pour outrepasser le rayon de convergence nul du développement théorique complet du quasi-potentiel est la mise en oeuvre de la procédure de resommation, ou transformation, de Borel :

$$\mathcal{B}[\Psi](x, \xi) = \sum_{p=0}^{p_{\max}-1} \frac{\Psi_{p+1}(x)}{p!} \xi^p, \quad (3.3.12)$$

puisque cette fois, le rayon de convergence se lit

$$\frac{1}{R_{\mathcal{B}}} = \limsup_{p \rightarrow \infty} \left| \frac{\Psi_{p+1}(x)}{p!} \right|^{1/p}. \quad (3.3.13)$$

En pratique, le rayon de convergence n'est plus nul, mais reste toutefois fini.

## 3.4 Extension du régime de faible activité

### 3.4.1 Resommation par transformée de Borel-Laplace

Dans la veine de la resommation de Borel du développement divergent de  $\Psi$ , l'objectif visé ici est celui d'étendre la fenêtre du régime de validité (convergence) de l'expansion de  $\Psi$  initialement établie à faible temps de corrélation, *i.e.* faible activité, vers des régimes plus élargis de valeurs de  $\tau$ . La visée ultime est donc double : (1) retrouver le régime de barrière de force prédit par les méthodes intégrales [AJBN90], [EWL20]. (2) achever de construire un pont analytique, sous contrôle, entre le régime de barrière de de potentiel ( $\tau \rightarrow 0$ ) et le régime de barrière de force ( $\tau \rightarrow \infty$ ), qui serait indispensable à la compréhension détaillée de cette transition de phase en  $\tau$ .

On s'inspire pour cela des méthodes de resommation des séries divergentes, appliquées à des situations d'hydrodynamique [DR19]. Commençons par remarquer qu'il existe un lien fort entre la transformée de Laplace de  $\mathcal{B}[\Psi]$  et le quasi-potentiel  $\Psi$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\mathcal{B}[\Psi]\}(x, \tau) &= \int_0^{+\infty} d\xi e^{-\xi/\tau} \left( \sum_{p=0}^{p_{\max}-1} \frac{\Psi_{p+1}(x)}{p!} \xi^p \right) \\ &= \sum_{p=0}^{p_{\max}-1} \frac{\Psi_{p+1}(x)}{p!} \int_0^{+\infty} d\xi e^{-\xi/\tau} \xi^p \\ &= \sum_{p=0}^{p_{\max}-1} \Psi_{p+1}(x) \tau^{p+1} \\ &= \Psi(x, \tau) - \Psi_0(x), \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

avec  $\Psi_0(x) = \Delta U(x)$ . Il est donc possible d'étudier  $\mathcal{L}\{\mathcal{B}[\Psi]\}(x, \tau)$  plutôt que  $\Psi(x, \tau)$  puisque les deux objets sont reliés suivant (3.4.1). La procédure de resommation [DR19] impose cependant d'opter, en amont, pour une représentation fractionnaire de la transformée de Borel, *i.e.* un approximant de Padé

$$\mathcal{P}^{(N_1, N_2)}\{\mathcal{B}[\Psi]\}(x, \xi) = \frac{\sum_{n=0}^{N_1} A_n(x) \xi^n}{\sum_{n=0}^{N_2} B_n(x) \xi^n} \quad (3.4.2)$$

L'intérêt d'une représentation effective de  $\mathcal{B}[\Psi]$  sous forme d'un approximant de Padé est double : (1) dans les situations pour lesquelles la procédure a été développée, la resommation par transformée de

Laplace des approximants fractionnaires conduit à des fonctions analytiques exactes et particulièrement simples. (2) il permet d'épouser les éventuelles singularités de la fonction qu'il approxime. Le comportement à  $\xi \rightarrow 0$  (*resp.*  $\tau \rightarrow 0$ ) impose une contrainte sur l'ordre du développement du numérateur et du dénominateur de cet approximant puisque, dans cette limite, l'approximant de la transformée de Borel et la transformée elle-même doivent admettre le même développement de Taylor. Cette condition, donnée dans [DR19], impose  $N_1 + N_2 = p_{\max}$ . Une seconde contrainte peut-être fixée par la condition de convergence que doit désormais satisfaire cette représentation effective à  $\xi \rightarrow \infty$ , on doit donc choisir  $N_2 > N_1$  pour que  $\mathcal{P}\{\mathcal{B}[\Psi]\}(x, \xi) \underset{\xi \rightarrow \infty}{\sim} 1/\xi^N$  avec  $N \geq 1$ . Ayant choisi cette représentation effective de  $\mathcal{B}[\Psi]$ , la procédure de Borel-Laplace consiste à en prendre la transformée de Laplace :  $\mathcal{L}\{\mathcal{P}^{(N_1, N_2)}\{\mathcal{B}[\Psi]\}\}$ , désormais plus régulière et convergente que l'expansion originelle de  $\Psi$ .

On cherche dès lors à rendre cette procédure de resommation de Borel-Laplace sous contrôle, puisque les deux contraintes sur les ordres  $N_1$  et  $N_2$  ne suffisent pas à les déterminer de manière univoque, à un  $p_{\max}$  donné. Étant, donné un potentiel particulier (*e.g.*  $U(x) = A(x^2 - k)^2$ ,  $U(x) = A \cos(kx)$ , *etc.*), l'idée est de sélectionner, pour tous les  $p_{\max}$  accessibles, les couples  $\{N_1, N_2\}$  pour lesquels la fenêtre de convergence en  $\tau$  est commune. A titre d'exemple :

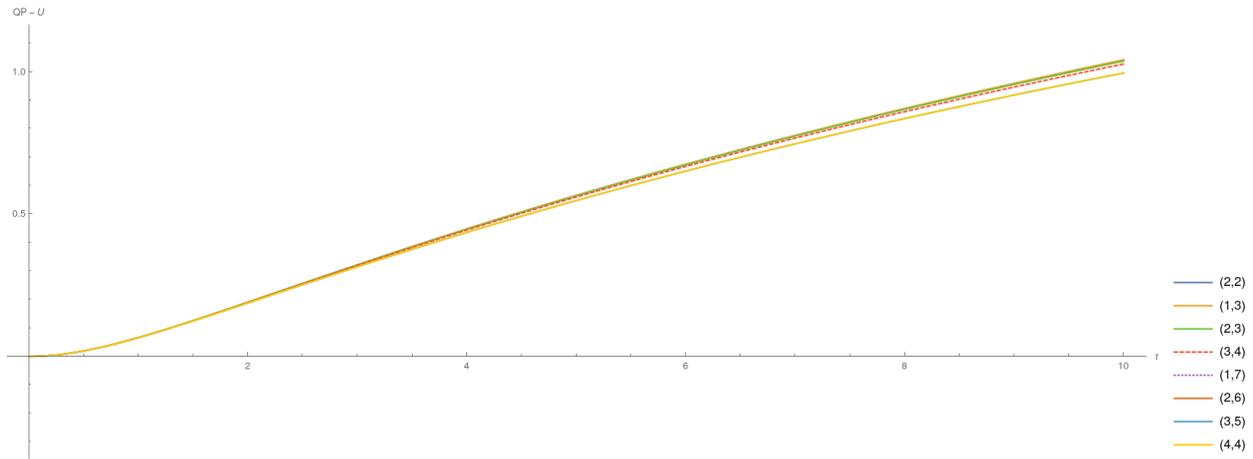


FIGURE 3.1 – Convergence de  $\mathcal{L}\{\mathcal{P}^{(N_1, N_2)}\{\mathcal{B}[\Psi]\}\}(x^*, \tau) = \Psi(x^*, \tau) - \Delta U(x^*)$  en fonction de  $\tau$ , pour des choix différents des couples  $\{N_1, N_2\}$  correspondant à des troncatures d'ordre  $p_{\max} = N_1 + N_2$  de l'expansion du quasi-potentiel  $\Psi$ , dans le cas d'un potentiel de la forme  $U(x) = \cos(x)$ .

On élimine ainsi d'éventuels degrés de liberté qui pourraient influencer sur le résultat finale de cette procédure.

Concernant l'intégration, trois approches de la transformation de Laplace de  $\mathcal{L}\{\mathcal{P}\{\mathcal{B}[\Psi]\}\}$  ont été conduites : (1) Analytique directe *via* la fonction LaplaceTransform de MATHEMATICA, à laquelle il faut ajouter, astucieusement, un arsenal d'options. (2) Analytique indirecte en pré-isolant les contributions des racines de  $\mathcal{P}\{\mathcal{B}[\Psi]\}$  et en cherchant des factorisations optimales des numérateurs et dénominateurs de  $\mathcal{P}\{\mathcal{B}[\Psi]\}$ . (3) Numérique : en contournant les pôles du plan complexe et en évaluant la partie principale des intégrales, l'approche par intégration numérique (aidée des options de précision numérique) permet de converger vers un résultat correspondant de manière excellente à celui, lorsqu'il existe, de l'intégration analytique directe (1) :

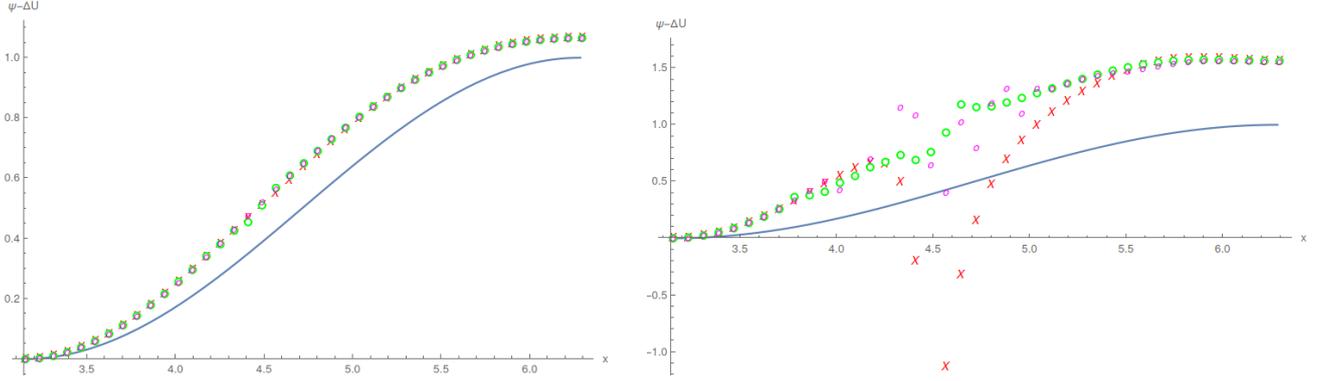


FIGURE 3.2 – Transformées de Laplace pour différents couples  $\{N_1, N_2\}$  et pour  $\tau = 1$  (gauche) et  $\tau = 3$  (droite), dans le cas d'un potentiel de la forme  $U(x) = \cos(x)$ .

En somme, la procédure de resommation par transformée de Borel-Laplace permet d'étendre le régime de validité en  $\tau$  de l'expansion de quasi-potentiel initialement valide à  $\tau \rightarrow 0$  (et divergente). En contre-coup, la fenêtre de validité spatiale de la série resommée est désormais rétrécie : des singularités intractables et inattendues dans les régions de force maximale *i.e.* de pente maximale apparaissent, suite à la transformation de Laplace, pour des valeurs croissantes de  $\tau$ .

### 3.4.2 Barrière de potentiel *vs* barrière de force ? Limitations et validé de la procédure

Permettant d'élargir la fenêtre de  $\tau$  sur laquelle les prédictions du quasi-potentiel sont valides, la procédure de Borel-Laplace restreint toutefois la fenêtre spatiale sur laquelle le résultat de la procédure converge. La région des lieux de pentes (*i.e.* forces) maximales présente, malgré toutes les tentatives de tractations numériques et méthodologiques, des singularités encore robustes. Borel-Laplace (astucieusement intégrée) présente néanmoins l'avantage de décrire les régions voisines de  $x_{\min}$  et  $x^*$  jusqu'à des valeurs assez élevées de  $\tau$  (*e.g.*  $\tau_{\text{num}} \sim 20$ ). L'idée est donc de tenter une description de l'évolution du lieu  $x^*$  du maximum de  $\Psi$  et de son voisinage, plus particulièrement la formation d'un plateau, à mesure que  $\tau$  augmente depuis la limite  $\tau \rightarrow 0$ . On rappelle que cette région des  $x$  est d'un intérêt particulier pour l'étude de propriété d'échappement puisque  $T_{\text{esc}} = \mathbb{P}(x^*, \tau)$ .

Puisque les procédures  $\mathcal{L}\{\mathcal{P}\{\mathcal{B}[\Psi]\}\}(x^*, \tau)$  et  $\mathcal{L}\{\mathcal{P}\{\mathcal{B}[\Psi[x^*]]\}\}(\tau)$  prédisent des résultats identiques, on décide d'étudier le décollement de  $\Psi$  en  $x^*$  *via*  $\mathcal{L}\{\mathcal{P}\{\mathcal{B}[\Psi]\}\}(x^*, \tau)$ . À des ordres  $p_{\text{max}}$  différents, les comportements dominants de cette transformée de Borel-Laplace en  $\tau \rightarrow \infty$  aboutissent à des divergences logarithmiques :  $\mathcal{L}\{\mathcal{P}\{\mathcal{B}[\Psi]\}\}(x^*, \tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\sim} \log(\tau) + \mathcal{O}(1/\tau)$ . Il donc impossible de capturer le comportement du quasi-potentiel prédit par les méthodes intégrales, dans le régime  $\tau \rightarrow \infty$  : formation d'un plateau à partir du lieu  $x_{\text{cr}}$  de force maximale.

Pour résumer, dans une limite de basse température et de faible activité, l'expansion du quasi-potentiel en puissance du temps de corrélation diverge ; en d'autres termes, son rayon de validité en  $\tau$  diminue à mesure que des corrections sont sommées. Une première alternative permet, par resommation de Borel, d'apaiser cette divergence en pondérant les termes du développement par des nombres factoriels. Insuffisant dans l'optique de chercher à retrouver le comportement asymptotique  $\tau \rightarrow \infty$  prédit par les méthodes intégrales, la dernière tentative (Borel-Laplace) permet d'étendre la validité des prédictions du quasi-potentiel en  $\tau$  sans toutefois permettre d'aller capturer le comportement prédit par les méthodes intégrales dans le régime de forte activité. Un contre-coup reste néanmoins que l'on perd en validité dans la région de force maximale.

### 3.5 Extrapolations alternatives par comparaisons aux asymptotes des méthodes intégrales

On cherche donc désormais à marier la procédure d'évaluation du quasi-potentiel par transformation de Borel-Laplace, à la contrainte que l'on veut imposer sur le comportement asymptotique à  $\tau \rightarrow \infty$ , autrement inaccessible.

#### 3.5.1 Limite de forte activité

D'après les résultats des méthodes par intégrales de chemin [EWL20], dans la limite de forte activité, le quasi-potentiel admet le développement

$$\Psi(x, \tau) - \Psi_0(x) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} x < x_{\text{cr}} : \frac{U'(x)^2}{2} \tau + \frac{U'(x)^2}{2U''(x)} + \mathcal{O}(1/\tau) \\ x > x_{\text{cr}} : \frac{U'(x_{\text{cr}})^2}{2} \tau + \frac{C U'(x_{\text{cr}})^2}{(\frac{1}{2}U'''(x_{\text{cr}})U'(x_{\text{cr}}))^{1/3}} \tau^{1/3} + \mathcal{O}(\tau^0) \end{cases}, \quad (3.5.1)$$

suivant que l'on se place au-delà ou en-deçà du lieu  $x_{\text{cr}}$  de pente (*i.e.* force) maximale. L'objectif consiste donc à dérouler, à rebours, la procédure par transformée de Laplace en cherchant la transformée de Borel asymptotique correspondant à cette limite du quasi-potentiel fixée par les méthodes par intégrales de chemins. En se rappelant que  $\mathcal{B}[\Psi](x, \xi) = \mathcal{L}^{-1}\{\Psi(x, \tau) - \Psi_0(x)\}$  et  $\mathcal{L}^{-1}\{\tau^p\} = \xi^{p-1}/\Gamma(p)$ , il vient :

$$\mathcal{B}[\Psi](x, \xi) \underset{\xi \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} x < x_{\text{cr}} : \Psi_0^\infty \delta(\xi) + \frac{\Psi_1^\infty}{\Gamma(1)} + \mathcal{O}(\xi^{-2}) \\ x > x_{\text{cr}} : \frac{\Psi_{1/3}^\infty}{\Gamma(1/3)} \xi^{-2/3} + \frac{\Psi_0^\infty}{\Gamma(1)} + \mathcal{O}(\xi^{2/3}) \end{cases}, \quad (3.5.2)$$

où  $\Psi_n^\infty$  sont les coefficients des puissances  $\tau^n$  du régime de forte activité (3.5.1). Fixons  $x > x_{\text{cr}}$  pour se concentrer sur l'effet de plateau, ou barrière de force, contenu dans cette limite de forte activité. On choisit d'extrapoler à des ordres de  $\xi$  supérieurs le comportement polynomial en  $\xi^{2/3}$  de la transformée de Borel :

$$\mathcal{B}[\Psi]^{p_{\text{max}}-1}(x, \xi) \underset{\xi \rightarrow \infty}{=} \sum_{p=0}^{p_{\text{max}}-1} \mathcal{B}_p(x) \left(\frac{1}{\xi^{2/3}}\right)^p + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\xi^{2p_{\text{max}}/3}}\right) \quad (3.5.3)$$

#### 3.5.2 Raccordement à la limite de faible activité

Ayant encodé la contrainte du comportement de  $\Psi$  à  $\tau \rightarrow \infty$  dans les coefficients  $\mathcal{B}_p(x)$  de la transformée de Borel en puissance de  $\xi^{2/3}$ , on cherche à raccorder  $\mathcal{B}[\Psi]$  au développement du régime de faible activité, *i.e.*  $\tau \rightarrow 0$ . Le candidat souhaité doit donc être à la fois une représentation effective de la transformée  $\mathcal{B}[\Psi]$  contrainte mais dont le développement de Taylor à  $\xi \rightarrow 0$  redonne bien, aussi, la Borel de la limite connue de faible activité. On cherche donc une représentation sous la forme d'un approximant de Padé en puissances de  $\xi^{1/3}$  ; en somme, une transformée de Borel effective du quasi-potentiel :

$$\mathcal{P}^{(N_1, N_2)}\{\mathcal{B}[\Psi]\}(x, \xi) = \frac{\sum_{n=0}^{N_1} A_n(x) (\xi^{1/3})^n}{\sum_{n=0}^{N_2} B_n(x) (\xi^{1/3})^n} \quad (3.5.4)$$

Une première contrainte sur l'ordre des développements du numérateur et du dénominateur de l'approximant de Padé est héritée du comportement dominant imposé par (3.5.1) dans la limite  $\xi \rightarrow \infty$  :  $\mathcal{B}[\Psi](x, \xi) \underset{\xi \rightarrow \infty}{\sim} \Psi_0^\infty/\Gamma(1) = \text{cte}$  d'où  $N_1 = N_2$ . Une deuxième contrainte peut ensuite être déduite de la limite  $\xi \rightarrow 0$  de cette représentation effective de la transformée de Borel du quasi-potentiel. Puisque dans cette limite, l'approximant de la transformée de Borel et la transformée elle-même doivent admettre le même développement de Taylor, la condition donnée par [DR19] impose :  $N_1 + N_2 =$

$3(p_{\max} - 1) + 1$ . Par combinaison des deux contraintes, on déduit que  $N = N_1 = N_2 = (p_{\max} - 2)/2$  doit être l'ordre du développement du numérateur et du dénominateur de  $\mathcal{P}^{(N,N)}\{\mathcal{B}[\Psi]\}(x, \xi)$ . Étant donné le développement

$$\mathcal{P}_0\{\mathcal{B}[\Psi]\}(x, \xi) = \sum_{k=0}^{p_{\max}-1} P_k^0(A_n(x), B_n(x)) \left(\xi^{1/3}\right)^k + \mathcal{O}\left(\xi^{p_{\max}/3}\right) \quad (3.5.5)$$

de l'approximant (3.5.4) dans la limite de faible activité et son développement

$$\mathcal{P}_\infty\{\mathcal{B}[\Psi]\}(x, \xi) = \sum_{k=0}^{p_{\max}-1} P_k^\infty(A_n(x), B_n(x)) \left(\frac{1}{\xi^{1/3}}\right)^k + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\xi^{p_{\max}/3}}\right) \quad (3.5.6)$$

dans la limite de forte activité, la procédure mise en oeuvre consiste à éliminer des degrés de liberté en exhibant des relations entre les coefficient inconnus  $\{A_n(x), B_n(x)\}$ . Une partie de ces contraintes est obtenue en se basant, dans un premier temps, sur les termes devant être présents dans chacun de ces développements (3.5.5), (3.5.6) :  $P_{k \neq 3p}^0(A_n(x), B_n(x)) = 0$  et  $P_{k \neq \frac{2p}{3}}^\infty(A_n(x), B_n(x)) = 0$ . À l'issue de cette procédure non univoque, seul un coefficient libre demeure apparent mais son impact est quasiment nul sur la forme de l'interpolation  $\mathcal{P}^{(N,N)}\{\mathcal{B}[\Psi]\}(x, \xi)$ . En effet :

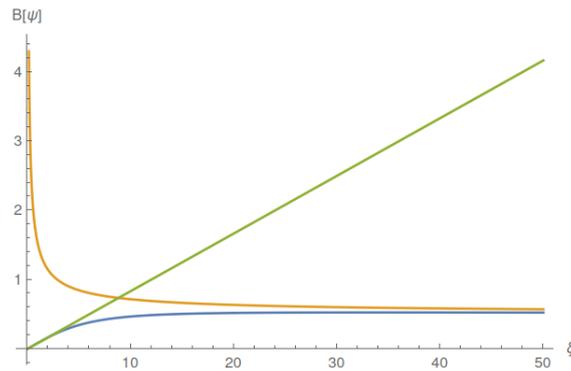


FIGURE 3.3 –  $\mathcal{B}[\Psi]\}(x^*, \xi)$  extrapolée (bleu), Borel théorique à faible activité (vert), Borel théorique à forte activité (orange).

puis, par transformée de Laplace :

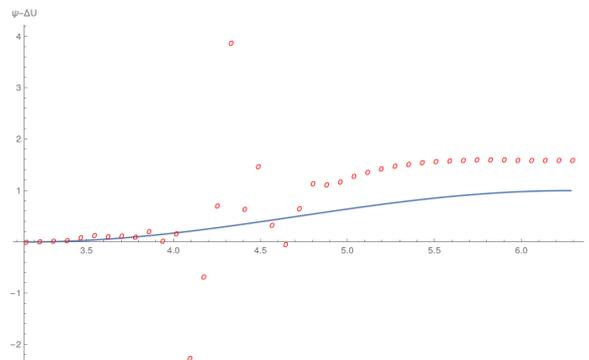


FIGURE 3.4 –  $\mathcal{L}\{\mathcal{P}\{\mathcal{B}[\Psi]\}\}(x, \tau = 3)$  (rouge) et potentiel  $U(x) = \cos(x)$  (bleu).

Par extrapolation du comportement asymptotique de  $\Psi$ , donné par les résultats préexistants des méthodes par intégrales de chemins [AJBN90], [EWL20], la mise en oeuvre d'une procédure d'interpolation permet de joindre les deux régimes d'activité limites *via* transformée de Borel-Laplace. La formation d'un plateau s'étendant à mesure que  $\tau$  augmente, dans la région du maximum du potentiel est dès lors plus apparente.

## Chapitre 4

# Processus d'Ornstein-Uhlenbeck actif bidimensionnel

---

4.1	Situation et enjeux : . . . . .	27
4.2	Quasi-potentiel bidimensionnel dans la limite de faible activité . . . . .	28
4.3	Effet de piégeage : localisation par non-localité . . . . .	28
4.3.1	Prédictions théoriques . . . . .	28
4.3.2	Simulations numériques . . . . .	31
4.4	Effet de cliquet par non-localité transverse . . . . .	33
4.4.1	Prédictions théoriques . . . . .	33
4.4.2	Simulations numériques . . . . .	34

---

*« Ici, il faut courir de toute la vitesse de ses jambes pour simplement demeurer là où l'on est. »  
L. Carroll, De l'autre côté du miroir.*

### Abstract :

In the weak activity regime, we attend to construct a well controlled extension of the uni-dimensional procedure to the case of a bi-dimensional active Ornstein-Uhlenbeck process, providing us with the two first corrections to the passive Boltzmann-Gibbs stationary distribution. The ensuring analytical results allow us to predict new phenomena due to the existing non-local correction of the stationary probability in the presence of activity : a trapping effect (localization by non-locality) and a ratchet effect (ratchet by transverse non-locality). The later are cross-checked with numerical simulations.

**Keywords :** Bi-dimensionnal AOUP . Trapping effect . Ratchet effect . Numerical simulations

### 4.1 Situation et enjeux :

On s'intéresse désormais à une extension bidimensionnelle de la procédure de dérivation des corrections du quasi-potentiel dans une limite de faible activité (et toujours à basse température). On se place donc dans des situations d'échappement bidimensionnelles, pour lesquelles une particule Ornstein-Uhlenbeck active évolue dans un potentiel  $U(\mathbf{r}) = U(x, y)$  : Peut-on exporter la procédure construite Sec. 3.3.2 vers ces situations d'échappements actifs bidimensionnels ? Quelles en sont les propriétés stationnaires ? Quels nouveaux phénomènes ces propriétés stationnaires sous-tendent elles ?

## 4.2 Quasi-potentiel bidimensionnel dans la limite de faible activité

Généralisons les équations de Langevin AOUP à une situation toujours mono-particulaire mais maintenant multi-dimensionnelle :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} &= -\nabla U + \mathbf{v} \\ \tau \dot{\mathbf{v}} &= -\mathbf{v} + \sqrt{2D}\eta \end{cases}, \quad (4.2.1)$$

en posant que deux composantes distinctes du vecteur de bruit blanc, correspondant aux bruits dans deux directions différentes sont décorrélés :  $\langle \eta_i(t)\eta_j(t') \rangle = \delta_{ij}\delta(t-t')$ . Sous le changement de variable  $\tilde{\mathbf{v}} \leftarrow \mathbf{v} - \nabla U$  [Bon19], [EWL20], il vient

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} &= \tilde{\mathbf{v}} \\ \tau \dot{\tilde{\mathbf{v}}} &= -(\mathbf{1} + \tau \mathbb{H}_U(\mathbf{r}))\tilde{\mathbf{v}} - \nabla U + \sqrt{2D}\eta \end{cases}, \quad (4.2.2)$$

dont le vecteur de dérive  $\mathbf{D}$  et la matrice de diffusion  $\mathbb{D}$  associés sont

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ -(\frac{1}{\tau}\mathbf{1} + \mathbb{H}_U(\mathbf{r}))\tilde{\mathbf{v}} - \frac{1}{\tau}\nabla U \end{pmatrix}; \quad \mathbb{D} = \frac{2D}{\tau^2} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (4.2.3)$$

L'évolution  $\partial_t \mathbb{P} = \mathcal{W}^\dagger \mathbb{P}$  de la distribution de probabilité  $\mathbb{P}$ , associée à cette dynamique d'Ornstein-Uhlenbeck active multi-dimensionnelle est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^\dagger \mathbb{P} &= -\nabla \cdot (\mathbf{D}\mathbb{P} - \nabla \cdot (\mathbb{D}\mathbb{P})) \\ &= \tau \mathbb{P} \Delta U - \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathbb{P} + \nabla_{\tilde{\mathbf{v}}} \mathbb{P} \cdot \mathbb{H}_U(\mathbf{r})\tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{\tau} (2\mathbb{P} + (\tilde{\mathbf{v}} + \nabla U) \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{v}}} \mathbb{P}) + \frac{1}{\tau^2} D \Delta_{\tilde{\mathbf{v}}} \mathbb{P}. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Similairement à la Sec. 3.2.3, il est possible d'approximer la forme de la distribution stationnaire de probabilité par une loi de grande déviation, ou de type WKB, dans la limite de basse température :  $\mathbb{P}(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{v}}) \underset{D \rightarrow 0}{\sim} \exp(-\Psi(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{v}})/D)$ . L'équation stationnaire  $\mathcal{W}^\dagger \mathbb{P}$  couplée à cette approximation nous laisse ensuite avec l'équation d'Hamilton-Jacobi sur le quasi-potentiel multidimensionnel

$$\tau^2 \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \Psi - \tau (\tilde{\mathbf{v}} + \nabla U + \mathbb{H}_U(\mathbf{r})) \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{v}}} \Psi + (\nabla_{\tilde{\mathbf{v}}} \Psi)^2 = 0. \quad (4.2.5)$$

Dans le régime de faible activité, on cherche à nouveau un développement perturbatif du quasi-potentiel en puissances du temps de corrélation :

$$\Psi(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{v}}, \tau) \underset{\tau \rightarrow 0}{=} \sum_{p=0}^{\infty} \Psi_p(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{v}}) \tau^p \quad (4.2.6)$$

## 4.3 Effet de piégeage : localisation par non-localité

*Take Your Time - Spiritualized*

### 4.3.1 Prédiction théorique

Par le même argument que celui développé Sec. 3.3.2, le premier terme de l'expansion s'écrit  $\Psi_0(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{v}}) = \Delta U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) - U_{\min}$ ,  $U_{\min}$  étant la valeur du potentiel au lieu de l'état métastable duquel la particule espère s'échapper. On cherche dans un premier temps à trouver des expressions analytiques des deux premières corrections  $\Psi_1(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{v}})$  et  $\Psi_2(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{v}})$ . En injectant le développement  $\Psi^1(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{v}}, \tau) = \Delta U(\mathbf{r}) + \tau \Psi_1(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{v}})$  dans l'équation d'Hamilton-Jacobi, et en sélectionnant le terme dominant dans la

limite  $\tau \rightarrow 0$ , on peut réécrire

$$(\nabla U - \nabla_{\tilde{\mathbf{v}}} \Psi_1) \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{v}}} \left( \frac{\tilde{\mathbf{v}}^2}{2} - \Psi_1 \right) = 0. \quad (4.3.1)$$

Fixons les positions spatiales  $x$  et  $y$  en tant que paramètres. Dans le plan des vitesses  $(\tilde{\mathbf{v}}_x, \tilde{\mathbf{v}}_y)$ , étant donné la forme de cette équation, il doit donc exister une fonction  $\mathcal{C}_1(\mathbf{r})$  des positions, telle que

$$(\tilde{\mathbf{v}} - \nabla_{\tilde{\mathbf{v}}} \Psi_1) = \mathcal{C}_1(\mathbf{r}) \mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{v}}_z} \times (\nabla U - \nabla_{\tilde{\mathbf{v}}} \Psi_1), \quad (4.3.2)$$

qui se réduit au système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{\mathbf{v}}_x} \Psi_1 &= \frac{\tilde{\mathbf{v}}_x - \mathcal{C}_1(\mathbf{r})}{1 - \mathcal{C}_1(\mathbf{r})} \frac{\partial_y U}{1 + \mathcal{C}_1(\mathbf{r})} \\ \partial_{\tilde{\mathbf{v}}_y} \Psi_1 &= \frac{\tilde{\mathbf{v}}_y + \mathcal{C}_1(\mathbf{r})}{1 + \mathcal{C}_1(\mathbf{r})} \frac{\partial_x U}{1 - \mathcal{C}_1(\mathbf{r})} \end{cases}. \quad (4.3.3)$$

En réinjectant la solution de la première équation du système dans la seconde, on en déduit que une forme que doit prendre la correction  $\Psi_1(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{v}})$ . Ensuite, en utilisant cette forme dans l'équation d'Hamilton-Jacobi tronquée, on en déduit qu'à moins de se placer dans une situation spatialement décorrélée pour laquelle  $U$  ne serait une fonction que d'une seule direction, l'unique solution envisageable impose  $\mathcal{C}_1(\mathbf{r}) = 0$ .  $\Psi_1(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{v}})$  s'écrit donc

$$\Psi_1(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{v}}) = \frac{\tilde{\mathbf{v}}^2}{2} + \mathcal{T}_1(\mathbf{r}), \quad (4.3.4)$$

où  $\mathcal{T}_1(\mathbf{r})$  est une fonction, à ce niveau indéterminée, de la position. Visuellement, il s'agit bien de la généralisation du résultat unidimensionnel 3.3.4 Sec. 3.3.2. Dans l'optique d'une mise en oeuvre de la procédure construite dans le chapitre 3, l'idée serait ici de trouver une condition de non-singularité sur la correction  $\Psi_2(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{v}})$  à l'ordre supérieur, qui soit assez puissante pour contraindre la forme explicite de  $\mathcal{T}_1(\mathbf{r})$ . Aucune tentative n'aboutit cependant à une méthode concluante, faute de quoi l'unique issue revient à poser un *Ansatz* généralisant l'équivalent unidimensionnelle,  $K_1(x) = U'(x)^2/2$  :

$$\mathcal{T}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\nabla U)^2. \quad (4.3.5)$$

On vérifie tout de même, *a posteriori*, qu'il est l'unique choix possible pour  $\mathcal{T}_1(\mathbf{r})$ . Concernant la seconde correction du quasi-potentiel,  $\Psi_2(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{v}})$ , aucune procédure ne permet *a priori* d'en déduire la forme, nous contraignant donc à poser un second *Anstaz* dans cette procédure. Il généralise directement l'expression unidimensionnelle  $\tilde{v}^2 U''(x)/2 + K_2(x)$  :

$$\Psi_2(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbb{H}_U(\mathbf{r}) \tilde{\mathbf{v}} + \mathcal{T}_2(\mathbf{r}), \quad (4.3.6)$$

avec  $\mathcal{T}_2(\mathbf{r})$ , une fonction encore indéterminée vérifiant

$$\nabla \mathcal{T}_2(\mathbf{r}) \cdot \nabla U(\mathbf{r}) + \mathcal{F}(\mathbf{r}) = 0, \quad (4.3.7)$$

où  $\mathcal{F}(x, y) = \partial_y^3 U (\partial_y U)^3 + \partial_x^3 U (\partial_x U)^3 + 3 \partial_x U \partial_x \partial_y^2 (\partial_y U)^2 + 3 \partial_y U \partial_y \partial_x^2 (\partial_x U)^2$ . Plusieurs pistes (*e.g.* contractions d'indices, divisions polynomiales, *etc.*) restent à ce stade analytiquement infructueuses mais l'on devine néanmoins que  $\mathcal{T}_2(\mathbf{r})$  est un terme non-local du potentiel  $U$ . Notons tout de même qu'une approche fondée sur des divisions euclidiennes polynômiales nous permet de confirmer que le choix (4.3.6) est le bon choix de  $\Psi_2(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{v}})$ . Le quasi-potentiel réduit,  $\Psi(\mathbf{r}, \tau) = \Psi(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0}, \tau)$ , donne

donc *in fine*

$$\Psi(\mathbf{r}, \tau) \underset{\tau \rightarrow 0}{\sim} \Delta U(\mathbf{r}) + \tau \frac{1}{2} (\nabla U)^2 + \tau^2 \mathcal{T}_2(\mathbf{r}) + \mathcal{O}(\tau^3), \quad (4.3.8)$$

en rappelant que  $\Delta U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) - U_{\min}$ .

Il est donc nécessaire de se tourner vers un cas particulier de potentiel pour lequel on espère qu'il est possible d'exhiber une expression analytique de  $\mathcal{T}_2(\mathbf{r})$ . Par analogie avec les situations unidimensionnelles, dans les régions où le potentiel  $U(x)$  est le plus resserré, le plus confinant, même si la contribution de la première correction est plate, l'effet de la seconde correction (non locale) est de plus en plus confinant. L'effet est toujours présent mais parfois pollué : dans le cas d'un potentiel polynômial (*e.g.* Landau), la contribution non locale, dont l'intégrand est  $U'(x)^2 U'''(x)$  passe de confinant à déconfinant. Ainsi, pour des valeurs trop grandes de  $x$ , le quasi-potentiel est aveugle aux effets prédits. L'idée est donc de choisir un cas particulier de potentiel qui soit périodique. L'avantage d'un tel choix étant que les régimes de  $x$  et  $\tau$  pour lesquels l'expansion du quasi-potentiel est valide (et confinante), sont plus larges. Dans l'optique de confirmer les prédictions *via* des simulations numériques, une autre indication pour le choix astucieux d'un  $U$  particulier impose celui d'un potentiel symétrique (invariant par translation) dans les deux directions spatiales et donc les couloirs sont plats. Il permettrait en effet de discerner correctement l'effet de l'activité, dont les corrections en puissances du temps de corrélation sont une signature, par comparaison à un échappement passif et réversible. Un bon choix est donc celui d'un potentiel symétrique dont les couloirs, plats, sont entièrement invariants par translation le long des deux directions spatiales :  $U(x, y) = \cos^2(x) \cos^2(y)$  :

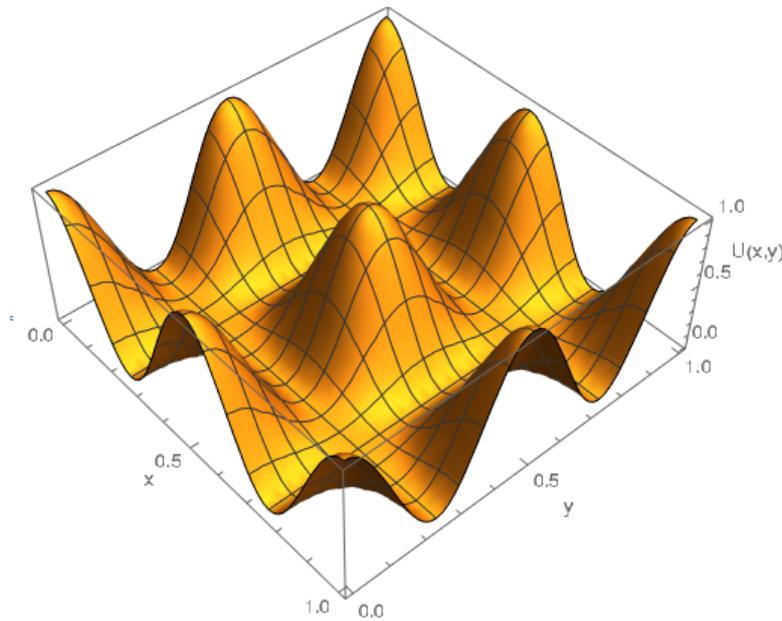


FIGURE 4.1 – Potentiel  $U(x, y) = \cos^2(x) \cos^2(y)$ .

Ce cas particulier est analytiquement soluble.  $\Psi_0$  et  $\Psi_1$  sont trivialement déterminées et l'équation implique que  $\mathcal{T}_2$  est de la forme  $\mathcal{T}_2(x, y) = f(\operatorname{cosec}(x)\sin(y)) + \tilde{\mathcal{T}}_2(x, y)$ , avec  $\tilde{\mathcal{T}}_2$ , une fonction explicitement déterminée et  $f$ , une fonction non-explicitée par MATHEMATICA, qu'il reste donc à régulariser. L'idée est de postuler la forme de  $f$  comme une fonction polynômiale de son argument et d'en ajuster les coefficients afin qu'ils permettent de retrouver le développement limité de  $\mathcal{T}_2$  que MATHEMATICA sait par ailleurs expliciter en  $x \rightarrow 0$ . Remarquons que le choix d'un potentiel spatialement décorrélé, de la forme  $U(x, y) = U_x(x) + U_y(y)$  redonne bien,  $\mathcal{T}_2(x, y) = K_2(x) + K_2(y)$ . On peut alors tracer le quasi-potentiel

comprenant les corrections jusqu'à l'ordre  $\mathcal{O}(\tau^2)$  :

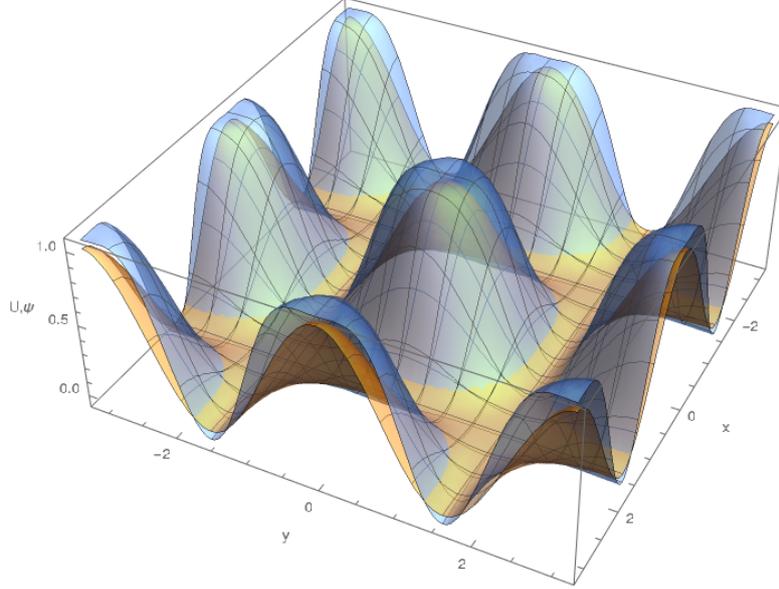


FIGURE 4.2 – Quasi-potentiel comprenant la correction  $\mathcal{O}(\tau^2)$  et potentiel  $U(x, y) = \cos^2(x) \cos^2(y)$  pour  $\tau = 1/4$ .

On observe en effet de localisation dans les régions de pente maximale. Dans le paysage du quasi-potentiel, les sommets se surélèvent et s'applatissent, mais surtout, les vallées se resserrent. Se rappelant que des minima du quasi-potentiel sont des maxima de la distribution stationnaire de probabilité, on en déduit la prédication d'un effet de piégeage puisque désormais, de nouvelles vallées viennent creuser le paysage initialement plat (en l'absence d'activité).

### 4.3.2 Simulations numériques

L'objectif de cette section est de comparer les prédictions analytiques de l'état stationnaire (4.3.8) d'une particule Ornstein-Uhlenbeck active évoluant dans le potentiel bidimensionnel  $U(x, y) = \cos^2(x) \cos^2(y)$ , à des simulations numériques du processus stochastique. L'idée, déterminante dans le choix de  $U$ , est donc de comparer la statistique stationnaire du processus dans la limite réversible, *i.e.* inactive, à la dynamique active :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} &= -\nabla U + \mathbf{v} \\ \tau \dot{\mathbf{v}} &= -\mathbf{v} + \sqrt{2D}\eta \end{cases} \quad (4.3.9)$$

Dans la limite où le temps de corrélation est strictement nul, *i.e.* une situation passive dans laquelle la particule est entièrement décorrélée du bain, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck  $\mathbf{v}(t)$  équivaut à un processus de Wiener puisque

$$\langle v_i(t) v_j(t+t') \rangle = \frac{D}{\tau} \delta_{ij} e^{-|t'|/\tau} \xrightarrow{\tau=0} D \delta_{ij} \delta(t'). \quad (4.3.10)$$

La dynamique devient simplement :

$$\dot{\mathbf{r}} = -\nabla U + \eta. \quad (4.3.11)$$

Un bon choix du schéma de discrétisation du processus est donc celui de Stratonovich, plutôt qu'Ito, car dans cette limite réversible  $\tau = 0$ , le processus est symétrique en temps. Posons les paramètres

$D_{\text{num}} = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $t_f = 10^4$ ,  $\Delta t_{\text{num}} = 1/50$  (pas de discrétisation) et  $\tau_{\text{num}} = 1/20$ . L'idée étant également de garantir une probabilité d'échappement suffisamment importante, on choisit de réécheler (abaisser) le potentiel  $U$  tout en garantissant un régime de basse température, *i.e.*  $\Delta U \gg D$ , dans lequel les prédictions analytiques sont valables :  $U(x, y) = (1/10) \cos^2(x) \cos^2(y)$ . Si les barrières de potentiel  $\Delta U$  étaient trop brutalement abaissées, dans cette limite  $\tau = 0$ , le processus diffusif serait complètement aveugle au paysage environnant.

Dans la limite de faible activité, *i.e.* pour les paramètres ci-dessus, on peut simuler l'échantillonnage d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck *via* un générateur de processus stochastique. La simulation de ce processus conduit à des dynamiques sensiblement plus lentes que la dynamique décorrélée, purement diffusive. Une idée pourrait être de diminuer la valeur de  $\Delta t$  en veillant néanmoins à ce qu'elle soit significativement petite devant celle du temps de corrélation, sans quoi la simulation serait aveugle au processus. Or, comme les simulations sont dans des régimes de petits temps de corrélation, il n'est pas évident de diminuer la valeur du pas de discrétisation. Un autre choix, pris ici, consiste à opter pour un schéma de discrétisation dont l'ordre du reste est meilleur que celui proposé par défaut dans le générateur `StratonovichProcess` de MATHEMATICA. Plusieurs schémas de discrétisation des processus de Stratonovich stochastiques sont proposés. Ces schémas (*e.g.* `Euler-Maruyama`, `Stochastic Runge-Kutta`, `Milstein`, *etc.*) ont des restes d'ordre différents (*resp.*  $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta t})$ ,  $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta t^3})$  et  $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta t^3})$ ). Puisque, la précision de ces schémas est similaire dans ce régime-là, autant choisir le schéma pour lequel les effets de  $\Delta t$  finis sont les meilleurs *i.e.*  $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta t^3})$ . Enfin, comme `Stochastic Runge-Kutta` apparaît comme quatre fois plus lent que `Milstein`, pour le même ordre du reste, notre choix définitif est celui du schéma `Milstein`.

On cherche donc enfin à comparer la mesure empirique *i.e.* l'histogramme des positions prises, pour un régime qui atteint une stationnarisation significative. Après combinaison de ces choix optimum et périodisation de la distribution stationnaire, on obtient

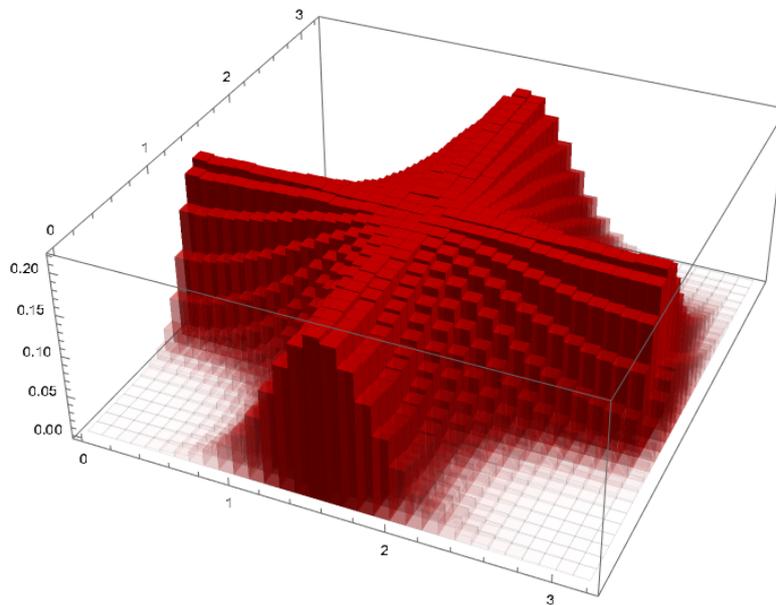


FIGURE 4.3 – Histogramme de la distribution stationnaire de probabilité d'une particule Ornstein-Uhlenbeck passive évoluant dans le potentiel  $\cos(x)^2 \cos(y)^2$ .

Pour la dynamique réversible, à  $\tau = 0$ , l'état stationnaire donné par la mesure de Boltzmann-Gibbs est entièrement local en  $U$ . Ayant choisi un potentiel invariant par translation le long des deux directions spatiales, l'échappement à lieu, de manière équiprobable dans toutes les directions. Dès que  $\tau > 0$ , des inhomogénéités se développent dans le paysage du quasi-potential. Elles induisent donc de nouvelles

barrières, des barrières de quasi-potentiel, qui, pour être franchies, nécessite un temps exponentiel. C'est cet effet de piégeage qui est bien confirmé par l'histogramme. Pour des même paramètre, la puissance de la localisation est particulièrement significative en regard de l'étalement de la distribution du processus soumis au bruit blanc Gaussien, *i.e.* inactif.

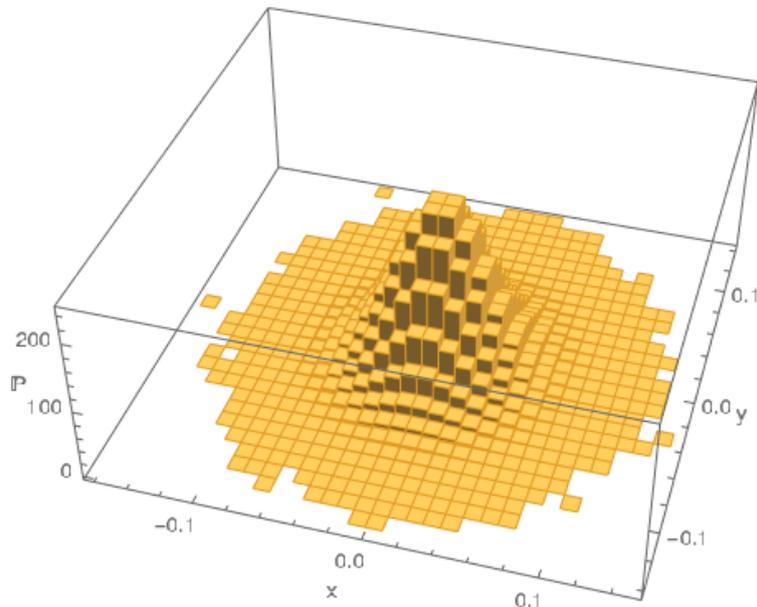


FIGURE 4.4 – Histogramme de la distribution stationnaire de probabilité d'une particule Ornstein-Uhlenbeck active évoluant dans le potentiel  $\cos(x)^2 \cos(y)^2$ .

## 4.4 Effet de cliquet par non-localité transverse

*Let It Flow - Spiritualized*

### 4.4.1 Prédiction théoriques

Combiner la prédiction de l'effet de piégeage, ou localisation, à une asymétrie unidirectionnelle du potentiel  $U$  pourrait être une voie d'accès pour prédire et décrire un effet de cliquet (*cf.* ratchet) bidimensionnel intrinsèque à la nature active du modèle. On décide donc d'introduire une asymétrie locale du potentiel  $U$  dans la direction  $\hat{y}$  tout en conservant les caractéristiques plates des couloirs :  $U(x, y) = \sin(x)^2(\sin(y) + \cos(3y))^2$ .

Qualitativement, cette asymétrie initiale entre les pentes orthogonales du potentiel, indique que l'effet de piégeage devrait être brisé dans la direction  $\hat{y}$ , au profit d'un flux. Il s'agit donc d'un effet de cliquet dû à un effet de confinement qui est non-invariant par renversement miroir dans la direction transverse à  $\hat{x}$ . Dans ce cas, puisque le resserrement des pentes du quasi-potentiel  $\Psi$  autour des vallées de  $U$  doit subir cette brisure de symétrie, on prédit un état stationnaire à courant non-nul dans la direction  $\hat{y}$ .

D'un point de vue quantitatif, la seconde correction du quasi-potentiel, et plus particulièrement l'équation sur le terme non-local  $\mathcal{T}_2(\mathbf{r})$ , est jusqu'ici intraitable analytiquement.

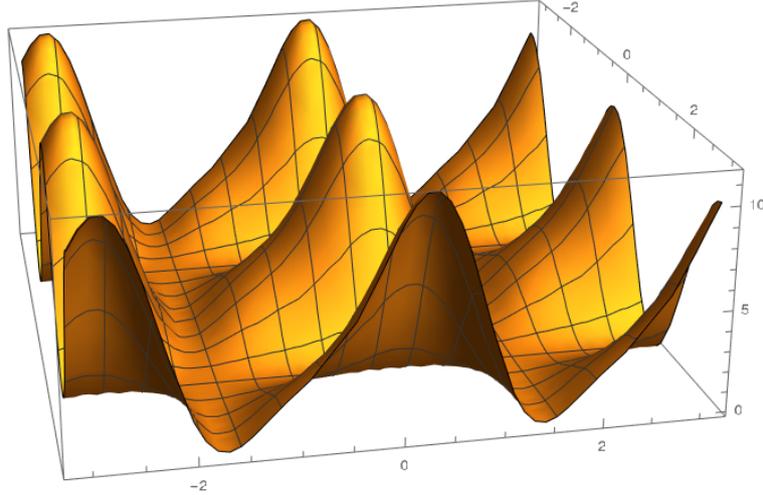


FIGURE 4.5 – Potentiel asymétrique  $U(x, y) = \sin(x)^2(\sin(y) + \cos(3y))^2$ .

#### 4.4.2 Simulations numériques

On cherche désormais à caractériser les courants moyens dans l'état stationnaire. L'équation de Fokker-Planck pouvant se lire comme une équation de conservation de la probabilité

$$\partial_t \mathbb{P} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (4.4.1)$$

en moyennant et en intégrant par partie, on déduit que  $\langle \mathbf{J}(\mathbb{P}) \rangle = \langle \partial_t \mathbf{r} \rangle$ . L'idée est donc de reconstituer numériquement le courant moyen  $\langle \partial_t \mathbf{r} \rangle = \langle \dot{\mathbf{r}} \rangle$  en moyennant sur les trajectoires échantillonnées. En situation passive, on observe bien, à quelques fluctuations près, que les valeurs simulées des courants moyens  $\langle \mathbf{J}_x \rangle$  et  $\langle \mathbf{J}_y \rangle$  sont toutes les deux nulles, à des fluctuations près (puisque  $|\langle \mathbf{J}_x \rangle^{\text{num}}| \sim 4.10^{-4}$  et  $|\langle \mathbf{J}_y \rangle^{\text{num}}| \sim 6.10^{-4}$ ), comme prédit analytiquement si l'on choisit d'évaluer  $\mathbf{J}$  dans la distribution de Boltzmann. À  $\tau > 0$ , le rapport entre une direction et l'autre est de l'ordre de  $10^2$  puisque  $|\langle \mathbf{J}_x \rangle^{\text{num}}| \sim 1.10^{-7}$  et  $|\langle \mathbf{J}_y \rangle^{\text{num}}| \sim 1.10^{-5}$ . Le rapport indique que  $\langle \mathbf{J}_x \rangle^{\text{num}}$  peut être considéré comme nul. Il s'agit cependant de la simulation numérique d'une statistique aléatoire, les valeurs de  $\langle \mathbf{J}_y \rangle^{\text{num}}$  peuvent donc résulter d'une combinaison des effets de discrétisation statistique et de temps fini. L'objectif est donc désormais de s'assurer qu'en dépit de ses faibles valeurs, il y a bien du signal dans  $\langle \mathbf{J}_y \rangle^{\text{num}}$  qui n'est pas de l'ordre du « bruit » de l'échantillonnage numérique.

Étant reliées au franchissement des barrières de quasi-potentiel apparaissant dans les couloirs initialement plats en l'absence d'activité, *i.e.* dans le paysage de  $U$ , ces vitesses moyennes doivent donc écheler suivant une loi de grande déviation. De plus, comme le courant est donc un effet de la non-localité, *i.e.* d'ordre  $\tau^2$ , l'amplitude de  $\langle \mathbf{J}_i \rangle$  doit être comparable à

$$|\langle \mathbf{J}_i \rangle| \sim \frac{D}{\tau^2} \log \langle \partial_t \mathbf{r}_i \rangle \quad (4.4.2)$$

dans le régime  $D \rightarrow 0$ , sans quoi des préfacteurs de correction en température seraient à prendre en compte dans l'échellage de grande déviation. Les ordres de grandeur indiquent donc que même si les valeurs numériques de  $|\langle \mathbf{J} \rangle|_y$  des simulations numériques demeurent extrêmement petites, elles restent cependant compatibles en regard des ordres de grandeur de l'échellage de grande déviation. Concernant la distribution stationnaire de probabilité, une fois stationnarisée, on observe en effet un étalement dans la bonne direction :  $\tilde{\mathbf{y}}$  :

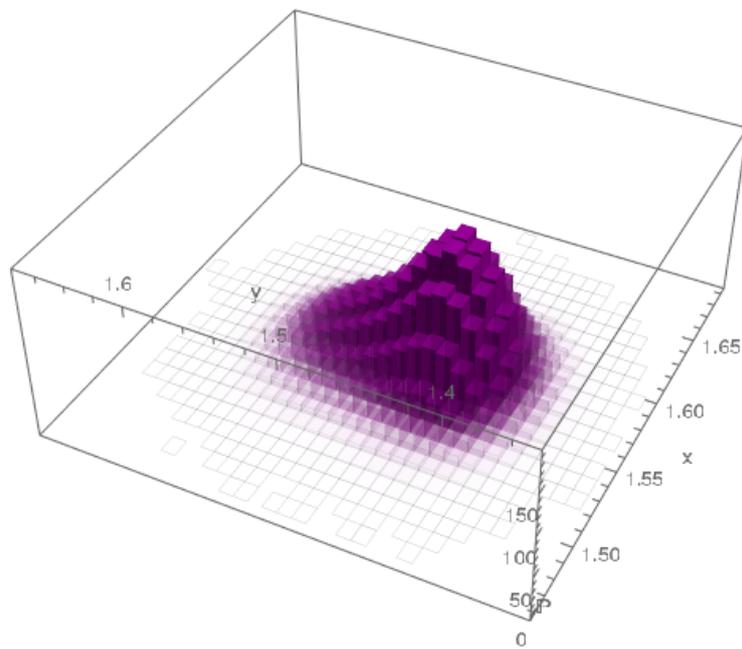


FIGURE 4.6 – Histogramme de la distribution stationnaire de probabilité d'une particule Ornstein-Uhlenbeck active évoluant dans le potentiel  $U(x, y) = \sin(x)^2(\sin(y) + \cos(3y))^2$ .



## Chapitre 5

# Conclusion

*« La fin est l'endroit d'où nous partons [...]
   
Nous n'aurons de cesse d'explorer
   
Et la fin de toutes nos explorations
   
Sera d'arriver à l'endroit d'où nous sommes partis
   
Et de connaître le lieu pour la première fois »*
  
**T.S. Eliot, *Four Quartets***

L'étude des propriétés stationnaires (*e.g.* distributions de probabilité et temps d'échappement) des modèles de matière active dans des situations conduites hors d'équilibre, et plus particulièrement du processus d'Ornstein-Uhlenbeck actif, permet donc d'exhiber des comportements inédits et exotiques. Dans le cas d'une unique particule d'Ornstein-Uhlenbeck active, modélisée par une vitesse d'auto-propulsion jouant le rôle d'un bruit temporellement corrélé, le développement d'une nouvelle procédure locale de dérivation de l'état stationnaire a pu être achevée. Elle prédit des corrections en puissance du temps de corrélation à la distribution d'équilibre de Boltzmann-Gibbs, ou encore la loi d'Arrhenius-Kramers, dans un régime de faible activité et à basse température. Le résultat de cette procédure englobe évidemment les prédictions analytiques pré-existantes des méthodes par intégrales de chemins et permet d'accéder à d'autres corrections encore. L'approche de resommation par transformée de Borel-Laplace permet ensuite d'étendre la validité de cette expansion en faible  $\tau$ , vers des régimes de plus forte activité. Les régions des minima et maxima du paysage sont bien décrites tandis que la validité, étendue en  $\tau$ , est perdue en  $x$ , dans les régions de force maximale. L'issue de la procédure de resommation montre néanmoins que la validité de l'expansion en  $\tau$  n'est pas infinie puisque l'on montre qu'il sera toujours impossible de capturer le comportement du quasi-potentiel à  $\tau \rightarrow \infty$ , tel que prédit par les approches trajectorielles. Enfin, l'ultime alternative dans laquelle cette asymptote inaccessible est désormais comprise en tant que contrainte dans la procédure, permet d'interpoler continuellement les deux asymptotes d'activité.

Etendue à des situations toujours mono-particulaires mais désormais bi-dimensionnelles, une procédure similaire à l'approche uni-dimensionnelle locale permet d'exhiber de nouveaux phénomènes, là où des approches intégrales sont fondamentalement impuissantes et inenvisageables. Dans certains cas particuliers du potentiel, les solutions analytiques existent et prédisent, en présence de faible activité, des effets de piégeages trouvant leur origine dans les corrections non-locales du quasi-potentiel. Ces effets de l'activité sont validés par des simulations numériques menées dans des régimes valides pour les prédictions analytiques.

Plusieurs pistes sont d'ores et déjà explorées et seront approfondies d'ici la fin de ce stage : Concernant les situations uni-dimensionnelles, une idée peut être de chercher à généraliser la procédure par intégrales de chemins établie par Bray *et al* [AJBN90], [AJMB90] à des cas où le point final de la trajectoire n'est pas forcément le point de potentiel maximal. Cette approche pourrait permettre de comparer autrement les prédictions aux résultats obtenus jusqu'à présent (*e.g.* (3.3.4)).

Concernant l'approche bi-dimensionnelle, une piste actuelle est de chercher à résoudre l'équation  $\nabla \mathcal{T}_2(\mathbf{r}) \cdot \nabla U(\mathbf{r}) = \mathcal{F}(\mathbf{r})$  (4.3.7) dans le cas d'un potentiel général, en cherchant à imposer des conditions de régularité sur la solution. Pour ce faire, une voie prometteuse est motivée par l'existence de solutions analytique de cette même équation qui peut se réécrire, après changement de variable :  $\mathcal{D}_\xi t_2 + \mathcal{D}_v t_2 = \mathcal{H}(\xi, v)$ . Dans l'exploration de potentiels particuliers, un exemple de situation menant à l'existence de courants rotationnels reste encore à éclaircir.

Enfin, d'autres pistes pourraient mener à introduire des situations à plusieurs particules, avec des potentiels d'interaction ou encore à étudier le cas d'un bruit multiplicatif, *i.e.* dont l'amplitude dépend du processus lui-même [MS88].

*The End - Sibylle Baier*

# Bibliographie

- [AJBN90] A. J. McKane A. J. BRAY et T. J. NEWMAN. « Path integrals and non-Markov processes. II. Escape rates and stationary distributions in the weak-noise limit ». In : *Phys. Rev. A* 41 (1990).
- [AJMB90] H. C. Luckock A. J. MCKANE et A. J. BRAY. « Paths integrals and non-Markov process : a general formalism ». In : *Phys. Rev. A* 41.2 (1990).
- [Bon19] L. L. BONILLA. « Active Ornstein-Uhlenbeck particles ». In : *Phys. Rev. E* 100 (2019), p. 1-12. DOI : [10.1103/PhysRevE.100.022601](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.022601).
- [DMW21] M. E. Cates É. Fodor C. Nardini-J. Tailleur D. MARTIN J. O’Byrne et F. van WIJLAND. « Statistical mechanics of active Ornstein-Uhlenbeck particles ». In : *Phys. Rev. E* 103 (2021).
- [DR19] C. Allery D. RAZAFINDRALANDY A. Hamdouni. « Numerical divergent series resummation in fluid flow simulation ». In : *European Journal of Computational Mechanics, Hermès / Paris : Lavoisier 2008* 17.4 (2019), p. 431-451. DOI : [hal-00312330](https://doi.org/10.1002/eqm.3130).
- [Dup] B. DUPLANTIER. « Le mouvement Brownien : » in : ().
- [EFW16] M. E. Cates J. Tailleur P. Visco E. FODOR C. Nardini et F. van WIJLAND. « How far from equilibrium is active matter ? » In : 117 (2016). DOI : [038103](https://doi.org/10.1038/nature18625).
- [EWL20] Y. Kafri E. WOILLEZ et V. LECOMTE. « Nonlocal stationary probability distributions and escape rates for an active Ornstein-Uhlenbeck particle ». In : *J. Stat. Mech.* (2020). DOI : [063204](https://doi.org/10.1093/imrn/rnab004).
- [EWT19] Y. Kafri V. Lecomte E. WOILLEZ Y. Zhao et J. TAILLEUR. « Activated escape of a self-propelled particle from a metastable state ». In : *Phys. Rev. Lett.* 122 (2019). DOI : [258001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.050601).
- [Flo20] E. FLORIANI. « Stochastic processes and fluctuations ». In : *FunPhys lectures, Stat. Phys. II* (2020).
- [GB19] J. GUIOTH et E. BERTIN. « Lack of an equation of state for the nonequilibrium chemical potential of gases of active particles in contact ». In : *J. Chem. Phys.* 150 (2019). DOI : [094108](https://doi.org/10.1063/1.5088008).
- [JH87] P. JUNG et P. HÄNGGI. « Dynamical systems : A unified colored-noise approximation ». In : *Phys. Rev. A* 35.10 (1987), p. 4464-4466.
- [LC21] A. Sarracino L. CAPRINI A. Puglisi. « Fluctuation-dissipation relations in active matter systems ». In : *Symmetry* 13.81 (2021). DOI : [http://doi.org/10.3390/sym13010081](https://doi.org/10.3390/sym13010081).
- [LD] R. Eichhorn L. DABELOW. « Irreversibility in active matter : general framework for active Ornstein-Uhlenbeck particles ». In : ().
- [LO21] J. Tailleur F. van Wijland L. O’BYRNE Y. Kafri. « Time-(ir)reversibility in active matter : from micro to macro ». In : (2021).
- [MS88] M. M. Klosek-Dygas ; B. J. MATKOWSKY et Z. SCHUSS. « Colored noise in dynamical systems ». In : *J. Appl. Math.* 48.2 (1988).
- [PR] W. Ebelin B. Lindner et L. Schimansky-Geier P. ROMANCZUK M. Ba2. « Active brownian particles : from individual to collective stochastic dynamics ». In : *EPJ* ().

- 
- [Ram10] S. RAMASWAMY. « The Mechanics and Statistics of Active Matter ». In : *Ann. Rev. Cond. Mat. Phys.* 1 (2010), p. 323-345.
- [SRT21] M. Kardar S. RO Y. Kafri et J. TAILLEUR. « Disorder-Induced Long-Ranged Correlations in Scalar Active Matter ». In : *Phys. Rev. Lett.* 126 (2021).
- [Ste18] S. STEFFENONI. « Active brownian dynamics ». In : *Doctoral theisis, Leipzig* (2018).